1/5

Libreta: [illegible] Comisión de Práctica: L (11:00 a 14:00

Nombre y Apellido: [illegible] Carrera: Cs. de la Computación

SEGUNDO PARCIAL 12/7/2014

Tema 4

1	2	3	4	Calificación
B-	B/R	B	R	A

Ejercicio 1. Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 tal que $F(2,3) = (3,1)$ y $DF(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sean $G, H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $G(x,y) = (x^2 - xy, x+y)$ y $H = F \circ G$.

(a) Decidir si H es inversible en algún entorno del punto $(2,1)$.

(b) Sean $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x,y) = 3x^2 + y$ y $K(x,y) = \gamma \circ H^{-1}(x,y)$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 1 de K en el punto $(3,1)$.

Ejercicio 2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2(x+3)^4 - y^2 + 3(x+3)^2$.

(a) Hallar, si existen, extremos locales y puntos silla de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinar si existen los máximos y mínimos absolutos de f en

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+3)^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq -3\},$$

y en caso de que existan, encontrarlos.

Ejercicio 3. Analizar la convergencia de la siguiente integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx.$$

Ejercicio 4. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el cuadrilátero de vértices $(2,3), (4,7), (3,4), (5,8)$. Calcular

$$\int\int_A (-y+2x)\cos(\sqrt{y-x})\,dxdy.$$

Justificar todas las respuestas

2/5

Parcial Análisis — Hoja 1 de 4 — 12/07/14

1) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1 tq $F(2,3) = (3,1)$ y $DF_{(2;3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad G(x;y) = (x^2 - xy,\ x + y)$

$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad H = F \circ G$

$H = F(G(x;y))$

a) [H inversible en entorno al $(2,1)$]?

$DG(2;1) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $DG(x;y) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Hipótesis?

$G(2;1) = (2^2 - 2 \cdot 1,\ 2+1) = (2;3)$

$DH(2;1) = DF_{(2;3)} \cdot DG_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(DH_{(2;1)}) = (3 \cdot 3) - ((-2) \cdot (-2)) = 5 \neq 0$

$H(2,1) = F(G(2;1)) = F(2,3) = (3,1)$

Como $\det(DH_{(2;1)}) \neq 0 \implies$ por el T.F.I, $\exists$ un entorno U, $(2,1) \in U$, y un entorno V, $(3,1) \in V$, tq $H : U \to V$ $\exists H^{-1} : V \to U$. ✓

b) $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad y(x;y) = 3x^2 + y$

$K(x;y) = y \circ H^{-1}(x;y)$

[Polinomio de Taylor de orden 1 de $K(3,1)$]?

$K(3;1) = y \circ H^{-1}(3;1) = y(H^{-1}(3;1)) = y(2;1) = 13$ Hipótesis

$y(2,1) = 3 \cdot (2)^2 + 1 = 13$ ✓

$DK(3;1) = Dy(2,1) \cdot D(H^{-1}(3;1))$

por T.F.I $\quad DH^{-1}(3,1) = (DH(2;1))^{-1}$

$(DH(2,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\underset{F_1 : 3 \to F}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)}$ $\underset{F_2 + 2F_1 \to F_2}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)}$ $\underset{F_2 \cdot (-3) \to F_2}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)}$ $\underset{3F_1 + 2F_2 \to F_1}{\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)}$ F_1

$$\left(\mathbb{D}H_{(2;1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{D}K_{(3;1)} = \mathbb{D}J_{(2;1)} \cdot \mathbb{D}H^{-1}(3;1)$ Hipótesis? H^{-1} es dif por el TFIn

$\mathbb{D}J_{(x;y)} = (6x \quad 1)$ $\mathbb{D}J_{(2;1)} = (12 \quad 1)$

$$\mathbb{D}K_{(3;1)} = (12 \quad 1)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = (-14 \quad -27)$$

$P_{(x;y)} = K_{(3,1)} + K_x(x-3) + K_y(y-1) = K_{(3;1)} + \langle \nabla K_{(x;y)}, (x,y)-(3,1)\rangle$

centrado en $(3,1)$

$P_{(x;y)} = 13 + (-14)(x-3) + (-27)(y-1) = 13 - 14(x-3) - 27(y-1)$

El polinomio de Taylor de K centrado en $(3;1)$ es:

$P_{(x;y)} = 82 - 14x - 27y$ de

3/5

Parcial Análisis

Hoja 2 de 4
12/07/14

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x;y) = 2(x+3)^4 - y^2 + 3(x+3)^2$

a) hallar extremos locales y puntos silla de f

$$\nabla f(x;y) = \begin{cases} f_x(x;y) = 8(x+3)^3 + 6(x+3) = 0 \Rightarrow x = (-3) \\ f_y(x;y) = -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

único?

$8(x+3)^3 + 6(x+3) = 0$

$\cancel{8(x^3 + 3 \cdot 3 x + 3 \cdot 3 x^2 + 3^3) + 6x + 18 = 0}$

$\cancel{8x^3 + 72x^2 + 222x + 234 = 0}$

$8(x+3)^3 = -6(x+3)$ si $x \neq (-3)$

$\frac{8(x+3)^{2}}{\cancel{(x+3)}} = -6$

$(x+3)^2 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

$|x+3| = \sqrt{-\frac{3}{4}} \notin \mathbb{R}$

con $x = (-3)$

$8 \cdot ((-3)+3)^3 + 6((-3)+3) = 0$

$8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$ ✓

$\nabla f = (0,0)$ son los únicos pues f es diferenciable

El punto crítico de $f(x;y)$ es $(-3;0)$

$f_{xx}(x;y) = 24(x+3)^2 + 6$

$f_{xx}(-3;0) = 24(-3+3)^2 + 6 = 6$

$f_{yy}(x;y) = -2$

$f_{xy}(x;y) = 0$

~~Hess f(x;y) =~~ $\cancel{\begin{pmatrix} 24(x+3)^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$

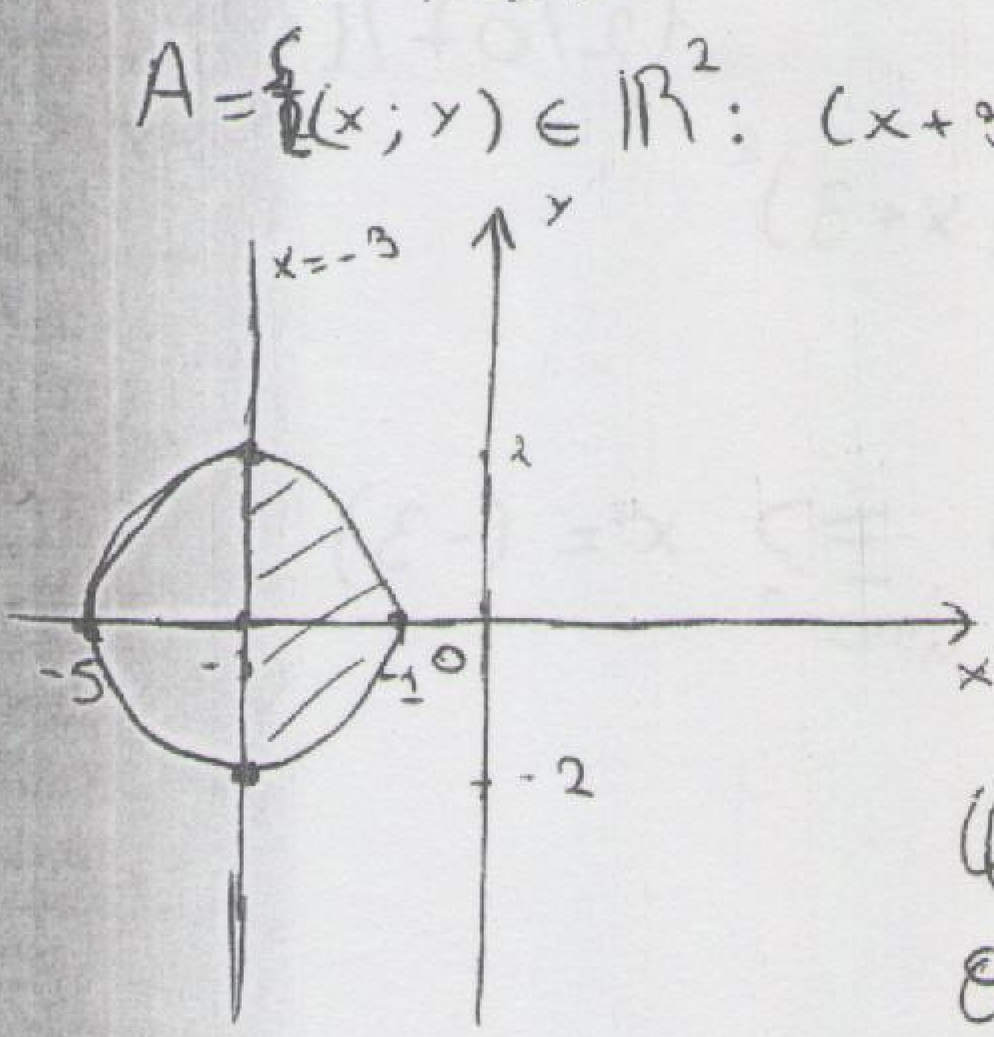
Hess $f(-3;0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\det_1 = 6$
$\det_2 = -12$

como la matriz es indefinida $\Rightarrow$ $f(-3;0)$ es un punto silla

b) determinar si $\exists$ max y min absolutos de f en:

$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 \leq 4 \ , \ x \geq -3)$



$\nabla f(x;y) = (8(x+3)^3 + 6(x+3) ; -2y)$

Por Lagrange : $\nabla f(x;y) = \lambda (\nabla G(x;y))$ y si $\nabla g = (0,0)$

con $G(x;y)$ la restricción.

$\varphi(x;y) = (x+3)^2 + y^2 = 4$

$\theta(x;y) = x+3$

$\nabla \varphi(x;y) = (2(x+3) ; 2y) \qquad \nabla \theta(x;y) = (1 ; 0)$

Ademas $(-3;-2)$ y $(-3;2)$ son posibles puntos críticos por ser la intersección de las restricciones

$x = -3 \qquad (-3+3)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow |y| = \sqrt{4} \Rightarrow y = \pm 2$

$\nabla f(x;y) = \lambda \nabla \theta(x;y)$

$8(x+3)^3 + 6(x+3) = 1\lambda \Rightarrow \lambda = 0$

$-2y = 0\lambda \Rightarrow y = 0 \qquad$ p.P.c $= (-3;0)$

$x = -3$

$\nabla f(x;y) = \lambda \nabla \varphi(x;y)$

$8(x+3)^3 + 6(x+3) = \lambda(2(x+3)) \Rightarrow 8(x+3)[(x+3)^2 + 1] = 0$

$-2y = \lambda 2y \Leftrightarrow \lambda = -1$ no falta $y=0$

$(x+3)^2 + y^2 = 4$

$8(x+3) = 0$ ó $(x+3)^2 + 1 = 0$

$x = -3$ ó $|x+3| = \sqrt{(-1)} \notin \mathbb{R}$

$((-3)+3)^2 + y^2 = 4$

$|y| = \sqrt{4} \Leftrightarrow y = \pm 2 \qquad$ P.c : $(-3;2)$ y $(-3;-2)$

Como A es un compacto y f continua $\Rightarrow$ Tiene maximo y minimo absolutos

$f(-3;2) = -4 \qquad (-3;0)$ es maximo absoluto

$f(-3;-2) = -4 \qquad (-3;2)$ y $(-3;-2)$ son minimos absolutos

$f(-3;0) = 0$

4/5

Parcial Analisis Hoja: 3 de 4
12/07/14

3) Analizar convergencia de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx$

~~Xxxxxx~~ $x^2(x^2-4)^{1/2} = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$
$x^2-4 = 0 \iff |x| = \sqrt{4} \iff x = \pm$

la integral tiene problemas en 2 y en $+\infty$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$$

Miro la integral entre 3 y $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2(x^2-4)^{1/2}}}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x^2-4)^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x^2-4)^{1/2}} = 0$$

Por criterio de cociente con $f = \frac{1}{x^2(x^2-4)^{1/2}}$ y $G = \frac{1}{x^2}$ (positivo)

si $\lim_{x\to b} \frac{F}{g} = 0 \Rightarrow$ si $\int_a^b g < +\infty \Rightarrow \int_a^b f < +\infty$

Entonces como $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge por ser una integral tipo P y $2 > 1$

~~xxxxx~~ por criterio de cociente $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2-4)^{1/2}}$, tambien converge

Ahora miro la integral entre 2 y 3

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2(x^2-4)^{1/2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{(t+4)^2\, t^{1/2}}dt$$

llamo a $t = x^2-4$
$|x| = \sqrt{t+4}$ pero $x \in (2;3) \Rightarrow x$ es positivo

$$\lim_{t\to0} \frac{\frac{1}{(t+4)^2 t^{1/2}}}{1/t^{1/2}} = \lim_{t\to0} \frac{\cancel{t^{1/2}}}{(t+4)^2\cancel{t^{1/2}}} = \cancel{\frac{1}{16}}\ \frac{1}{4}$$

por criterio de cociente ~~con~~ $f = \frac{1}{(t+4)^2 t^{1/2}}$ y $g = \frac{1}{t^{1/2}}$

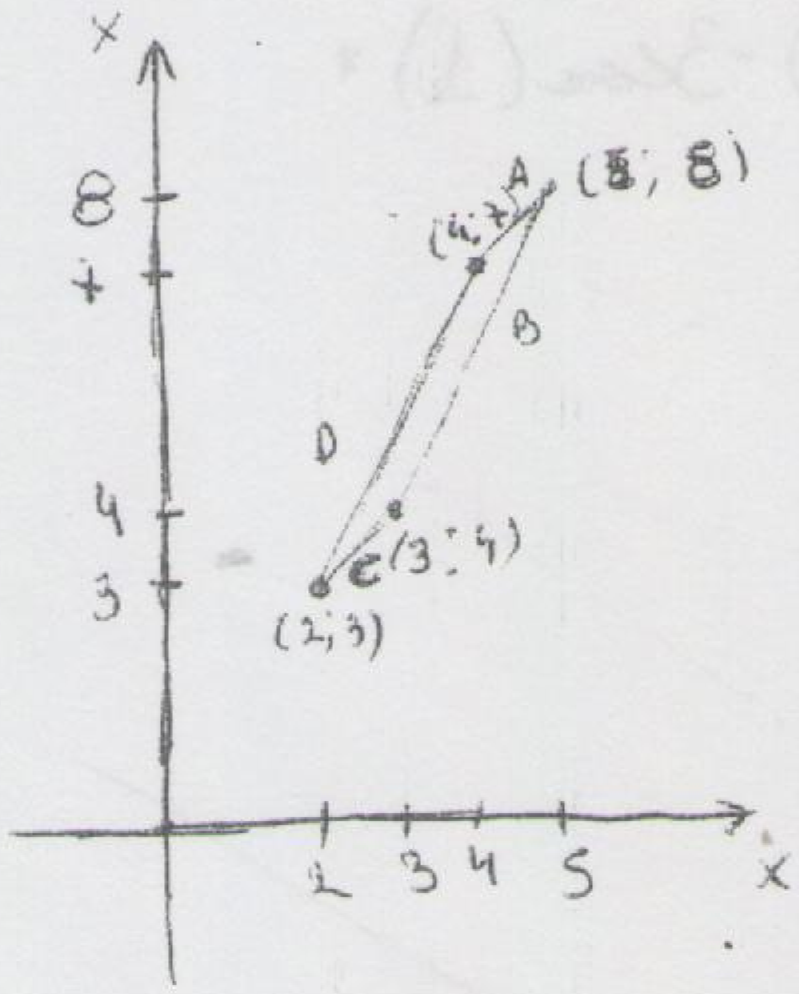
si $\lim \frac{F}{g} = L\ (\star L \neq 0) \Rightarrow \int^a \frac{1}{g} < +\infty \iff \int^a F < +\infty$

Entonces como $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}$, converge por $1/2 < 1$ y ser una integral tipo p, por criterio de cociente $\int_0^1 \frac{1}{(t+4)^2 t^{1/2}}$, también lo hace.

Entonces $\int_2^3 \frac{1}{x^2 (x-4)^{1/2}}$ también converge

Parcial Analisis Hoja 4 de 4
12/07/14

4) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el ~~cu~~ cuadrilatero con vertices $(2,3),(4,7),(3,4)$
$(5,8)$
Calcular: $\iint_A (-y+2x)\cos(\sqrt{y-x})\,dx\,dy$



$A = mx+b$ $\qquad \frac{(8-7)}{(5-4)} = \frac{1}{1} = 1$
$8 = 1.5+b$
$3 = b$
$\cancel{x} = x+3 \Rightarrow y - x = 3$

$D = mx+b$ $\qquad \frac{(7-3)}{(4-2)} = \frac{4}{2} = 2$
$7 = 2.4+b$
$-1 = b$
$y = 2x - 1 \Rightarrow 2x - y = 1$

$B = mx+b$ $\qquad \frac{(8-4)}{(5-3)} = \frac{4}{2} = 2$
$8 = 2.5+b$
$-2 = b$

$y = 2x-2 \Rightarrow 2x - y = 2$

$C = mx+b$ $\qquad \frac{(4-3)}{(3-2)} = \frac{1}{1} = 1$
$4 = 1.3+b$
$1 = b$

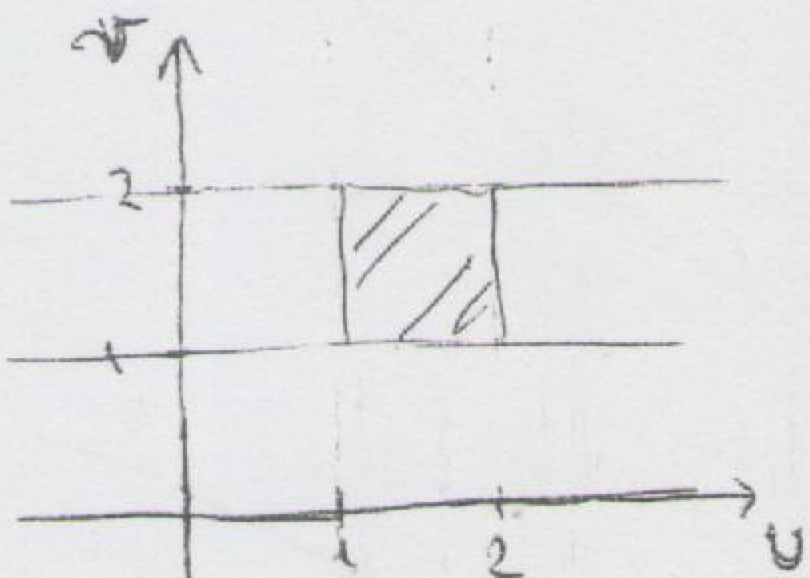
$y = x+1 \Rightarrow y - x = 1$

$1 \le U = 2x - y \le 2$
$1 \le V = y - x \le 3$

$F(U;V) = (2x-y;\, y-x)$

$\left|\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = |2-(1)| = |1| = 1$

$J = 1$



$$\iint_A (-y+2x)\cos(\sqrt{y-x})\,dx\,dy$$
$$= \int_1^3\int_1^2 1.U\cos(\sqrt{v})\,du\,dv$$
$$= \int_1^3 \cos(\sqrt{v})\left(\left.\frac{U^2}{2}\right|_1^2\right)dv = \int_1^3 \cos(\sqrt{v})\,(2-1/2)\,dv$$
$$= \frac{3}{2}\int_1^3 \cos(\sqrt{v})\,dv = \frac{3}{2}\int_1^3 \cos(t)\,t.2\,dt$$

$\sqrt{v} = t$ $\qquad$ Cambian los bordes $\qquad f = 2t \qquad g' = \cos(t)$

$\frac{1}{2\sqrt{v}}\,dv = dt$ $\qquad f' = 2 \qquad g = \operatorname{sen}(t)$

$dv = 2t\,dt$ Es un cambio de variables!

$$\frac{3}{2}\int_1^3 \cos(t)\,2t\,dt = \frac{3}{2}\left(2t\,\mathrm{sen}\,t\Big|_1^3 - \int_1^3 2\,\mathrm{sen}\,t\,dt\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(2\sqrt{v}\,\mathrm{sen}\sqrt{v}\Big|_1^3 - 2\left(-\cos(\sqrt{v})\Big|_1^3\right)\right)$$

$$= \frac{3}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}) - \cancel{2}\,\mathrm{sen}(1) + \cancel{2}\cos(\sqrt{3}) - \cancel{2}\cos(1)\right) =$$

$$= \cancel{\frac{3}{2}}\;3\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}) - 3\,\mathrm{sen}(1) + 3\cos(\sqrt{3}) - 3\cos(1)$$