1) Sea $w \in G_{26}$ una raíz primitiva
Determine todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{2^n} = \bar{w}^4$

- Como $w \in G_{26}$, $|w| = 1$

y como $w \cdot \bar{w} = |w|^2 = 1$, entonces $\bar{w} = w^{-1}$,

luego $\bar{w}^4 = w^{-4}$.

Tengo entonces que $w^{2^n} = w^{-4}$

$$w^{2^n+4} = 1 = w^{26}$$ uso que $w \in G_{26}$ $(w \neq 0)$ y es primitiva

$$\left[\, 2^n + 4 \equiv 0 \pmod{26} \,\right]$$ quiero ver para que $n \in \mathbb{N}$ se cumple.

$26 = 2 \cdot 13$, y como $(2 : 13) = 1$,

$$2^n + 4 \equiv 0 \pmod{26} \overset{TCR}{\iff} \begin{cases} 2^n + 4 \equiv 0 \pmod{2} & \text{I} \\ 2^n + 4 \equiv 0 \pmod{13} & \text{II} \end{cases}$$

I $\;2^n + 4 \equiv 0 \pmod{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

II $\;2^n + 4 \equiv 0 \pmod{13}$

$\quad 2^n \equiv 9 \pmod{13}$

Como 13 es primo y $(2^n : 13) = 1$,

Por el pequeño teorema de Fermat, $2^n \equiv 2^{r_{12}(n)} \pmod{13}$

Entonces, busco los $n \in \mathbb{N}$ tq $2^{r_{12}(n)} \equiv 9 \pmod{13}$

Analizo los posibles restos de dividir n por 12,

y veo cual cumple la condición.

Si

- $r_{12}(n) = 0 \Rightarrow 2^n \equiv 2^0 \equiv 1 \not\equiv 9 \pmod{13}$

- $r_{12}(n) = 1 \Rightarrow 2^n \equiv 2 \not\equiv 9 \pmod{13}$

⋮

$$\boxed{r_{12}(n) = 8 \Rightarrow 2^n = 256 \equiv 9 \pmod{13}}$$

Haciendo cuentas con todos los posibles restos, se llega a que $r_{12}(n) = 8$ es el único que verifica.

- Los únicos n que verifican que $2^{r_{12}(n)} \equiv 9 \pmod{13}$

son los n tales que $r_{12}(n) = 8$,

$$n = 12k + 8, \quad \text{con } k \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{si } k \text{ es negativo, } n \text{ no es natural})$$

como todo n satisface (I),

los n que satisfacen la ecuación original,

son de la forma $\boxed{n = 12k + 8, \quad k \in \mathbb{N}_0}$

(2) Decidir si puede existir una relación en un conjunto A para que:

a) REFLEXIVA, SIMETRICA Y ANTISIMÉTRICA.

$\boxed{\text{Existe}}$.

Tomo $A = \{1,2,3\}$

y R definida como: $aRb \iff a=b$

- REFLEXIVA, pues $aRa \iff a=a$ ✓
- SIMETRICA, pues $aRb \Rightarrow bRa$
  $a=b \Rightarrow b=a$ ✓
- ANTISIMÉTRICA, pues aRb y $bRa \Rightarrow a=b$
  $a=b$ y $b=a \Rightarrow a=b$.

b) REFLEXIVA, SIMETRICA, ANTISIMÉTRICA. Y TRANSITIVA.

$\boxed{\text{EXISTE}}$ Tomo, igual que en A), $A=\{1,2,3\}$ y R: $aRb \iff a=b$

- Ya sé que es reflexiva, simétrica y antisimétrica.

Falta mostrar que es transitiva.

- TRANSITIVA, pues aRb y $bRc \Rightarrow aRc$

  $a=b$ y $b=c \Rightarrow a=c$

c) SIMETRICA, ANTISIMETRICA y NO TRANSITIVA.

$\boxed{\text{NO EXISTE}}$, pues si R es simétrica y antisimétrica, es transitiva.

- Tomo R simétrica y antisimétrica.

$aRb \Rightarrow bRa$ por simetría. Como aRb y $bRa \Rightarrow a=b$, por antisimetría.

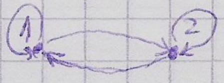
Luego, si $aRb \Rightarrow a=b$
y si $bRc \Rightarrow b=c$.

Si tuviese aRb y bRc entonces $a=c$ y la igualdad es transitiva.

d) Simetrica, No Antisimetrica y Transitiva.

Existe. Tomo $A = \{1,2\}$ y

$$R = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$$



· Es simetrica:

$1R1 \Rightarrow 1R1$
$1R2 \Rightarrow 2R1$
$2R1 \Rightarrow 1R2$
$2R2 \Rightarrow 2R2$

· No es antisimetrica:

$1R2$ y $2R1$ pero $1 \neq 2$.

· Es transitiva:

$1R1$ y $1R1 \Rightarrow 1R1$
$1R1$ y $1R2 \Rightarrow 1R2$
$1R2$ y $2R1 \Rightarrow 1R1$
$1R2$ y $2R2 \Rightarrow 1R2$

$2R1$ y $1R1 \Rightarrow 2R1$
$2R1$ y $1R2 \Rightarrow 2R2$
$2R2$ y $2R1 \Rightarrow 2R1$
$2R2$ y $2R2 \Rightarrow 2R2$.

③ Encuentre un polinomio mónico $g(x)$ de grado 2 en $\mathbb{Z}[x]$ que verifique simultáneamente las siguientes propiedades:

- $g(0) \equiv 2 \pmod 5$ y $g(2) \equiv 0 \pmod 5$
- $g(0) \equiv 3 \pmod 7$ y $g(3) \equiv 1 \pmod 7$

- $g(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$

- $g(0) = b$ $\quad g(2) = 4 + 2a + b \quad g(3) = 9 + 3a + b$.

$g(0) = b \equiv 2 \pmod 5$ y $g(2) = 4 + 2a + b \equiv 0 \pmod 5$

$4 + 2a + 2 \equiv 0 \pmod 5$

$2a \equiv 4 \pmod 5$

$2 \cdot (3) \equiv 1 (5)$

$a \equiv 4 \cdot 3 \pmod 5$

$\boxed{a \equiv 2 \pmod 5}$

- $g(0) \equiv 3 \pmod 7$ y $g(3) \equiv 1 \pmod 7$

$b \equiv 3 \pmod 7$ y $9 + 3a + b \equiv 1 \pmod 7$

$9 + 3a + 3 \equiv 1 \pmod 7$

$3a + 5 \equiv 1 \pmod 7$

$3a \equiv 3 \pmod 7$

$3 \cdot 5 \equiv 1 \ (7)$

$\boxed{a \equiv 1 \pmod 7}$

tengo entonces que:

$$\begin{cases} b \equiv 2 \pmod 5 \\ b \equiv 3 \pmod 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \equiv 2 \pmod 5 \\ a \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \text{TCR} \qquad\qquad \Updownarrow \text{TCR}$$

$$b \equiv 17 \pmod{35} \qquad\qquad a \equiv 22 \pmod{35}$$

Puedo tomar $b = 17$ y $a = 22$ y tengo: $\boxed{g(x) = x^2 + 22x + 17}$

④ ¿Cuántos $n \in \mathbb{N}$ hay que satisfacen simultáneamente:

- n es divisible por 3
- la escritura de n en base 9 es capicúa
- la escritura de n en base 9 tiene 7 dígitos
- la escritura de n en base 9 tiene al menos 3 dígitos iguales.

- n tiene exactamente 7 dígitos en base 9

$$n = a_1 + a_2 \cdot 9 + a_3 \cdot 9^2 + \dots + a_7 \cdot 9^6 \quad , \quad a_7 \neq 0,$$

$$0 \leq a_i \leq 8 .$$

- n es divisible por 3,

$$a_1 + a_2 \cdot 9 + a_3 \cdot 9^2 + \dots + a_7 \cdot 9^6 \equiv 0 \pmod 3$$

$$a_1 \equiv 0 \pmod 3$$

- la escritura de n en base 9 es capicúa:

$$a_1 = a_7 \quad , \quad a_2 = a_6 \quad , \quad a_3 = a_5$$

$$(n)_9 = A\ B\ C\ D\ C\ B\ A$$

$A \neq 0$, (pues no tendría 7 dígitos) y $A \equiv 0\ (3) \Rightarrow A = 6$ o $A = 9$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{I} \quad n = 3BCDCB3 \\ \text{II} \quad n = 6BCDCB6 \end{array}}$$

Calculo la cantidad de n en I.

$$\#\begin{pmatrix}\text{TODOS LOS}\\\text{POSIBLES}\end{pmatrix} = \#\begin{pmatrix}n \text{ con}\\\text{NINGUN}\\\text{DIGITO IGUAL}\end{pmatrix} + \#\begin{pmatrix}n \text{ con}\\\text{EXACTAMENTE}\\\text{1 IGUAL}\end{pmatrix} + \#\begin{pmatrix}n \text{ con}\\\text{EXACTAMENTE}\\\text{2 IGUAL}\end{pmatrix} + \#\begin{pmatrix}n \text{ con}\\\text{AL MENOS}\\\text{3 IGUALES}\end{pmatrix}$$

$\#\left(\begin{matrix}n \text{ con NINGÚN} \\ \text{dígito igual}\end{matrix}\right) = 0$, pues el 3 está dos veces.

$\#\left(\begin{matrix}n \text{ con} \\ \text{EXACTAMENTE} \\ 1 \text{ dígito igual}\end{matrix}\right) = 0$, el 3 está dos veces,
B está 2 veces, (es capicúa)

$\#\left(\begin{matrix}n \text{ con} \\ \text{EXACTAMENTE} \\ 2 \text{ iguales}\end{matrix}\right)$: $n = 3\ B\ C\ D\ C\ B\ 3$

$3 \to$ Fijo
$B \to 8P \to$ B no puede ser 3,
$C \to 7P \to$ C no puede ser 3 ni B.
$D \to 6P$

$\#\left(\begin{matrix}n \text{ con} \\ \text{EXACTAMENTE} \\ 2 \text{ iguales}\end{matrix}\right) = \boxed{8.7.6}$.

$\#\left(\begin{matrix}\text{Todos los} \\ n \text{ posibles}\end{matrix}\right)$: $3\ B\ C\ D\ C\ B\ 3$

$B \to 9P$
$C \to 9P$: $\boxed{9^3}$
$D \to 9P$

$\Rightarrow \#\left(\begin{matrix}n \text{ con al menos} \\ 3 \text{ iguales}\end{matrix}\right) = \#\left(\begin{matrix}\text{Todos los} \\ n\end{matrix}\right) - \#\left(\begin{matrix}n \text{ con exactamente} \\ 2 \text{ iguales}\end{matrix}\right)$

$\#\left(\begin{matrix}n \text{ con al menos} \\ 3 \text{ iguales}\end{matrix}\right) = 9^3 - 8.7.6 = \boxed{393} = \text{(I)}$

(II) Para 6 B C D C B 6 hay exactamente la misma cantidad que para (I), pues en vez de estar el 3 fijo, está el 6 fijo.

$\Rightarrow$ (II) $= 393$.

Finalmente, la cantidad total de $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen los 4 ítems, son $393 + 393 = \boxed{786}$