FINAL 2/9/10 ✓

(1) SEA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DERIVABLE. NOTAR Q f' NO ES NECESARIAMENTE CONTINUA.

a) f' NO SE ANULA EN (a,b). PROBAR Q f ES INYECTIVA EN $[a,b]$.

b) SI f ES INYECTIVA, PROBAR Q f ES ESTRICTAM. CREC. O ESTR. DECR.

c) SI EXISTEN $a<b$ / $f'(a)<0<f'(b)$, PROBAR Q $\exists$ c ENTRE a Y b TAL Q $f'(c)=0$.

(2) SEA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DE CLASE C^2. PROBAR Q SI $H_f(P)=0$ $\forall$ $P \in \mathbb{R}^n$ ENTONCES f ES UNA FUNCIÓN LINEAL.

(3) CONSIDEREMOS LA TRANSFORMACIÓN DADA POR

$$u = e^x \cdot \cos y \qquad v = e^x \cdot \sin y + \frac{1}{2} \cdot e^x$$

VERIFICAR QUE EXISTE UN ENTORNO DEL PUNTO $(x,y)=(0,0)$ DONDE ESTA TRANSFORMACIÓN ES INVERSIBLE Y CALCULAR $\frac{\partial y}{\partial u}(1, 1/2)$

(4) SEA $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ TAL Q $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ P PARTICIÓN DE $[a,b] \times [c,d]$ TAL Q $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$. PROBAR Q f ES INTEGRABLE. ← VER BIEN

$\boxed{2/9/10}$

① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable. f' no es necesariamente continua. Probar

a) f' no se anula en $[a,b]$. $\Rightarrow$ f es inyectiva en $[a,b]$

b) Si f es inyectiva, Probar que f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente

c) Si existen $a<b$ tales que $f'(a)<0<f'(b)$, probar que existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$

a) Sean $x,y\in[a,b]$ con $a\leq x<y\leq b$. La función f es derivable en (x,y) y continua en $[a,b]$. Ergo, por el Teorema de Lagrange $\exists\, c\in(x,y)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

$$f'(c)\neq 0 \iff \underset{\forall x\neq y}{f(y)\neq f(x)} \iff f \text{ inyectiva}$$

b) $\forall [x,y]\in\mathbb{R}^2$ aplico Lagrange.

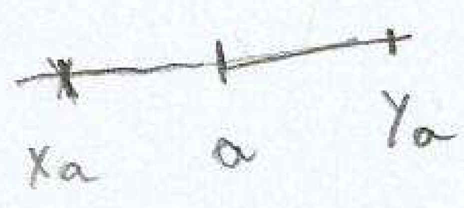
$$\Rightarrow \exists\, c\in(x,y):\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)$$

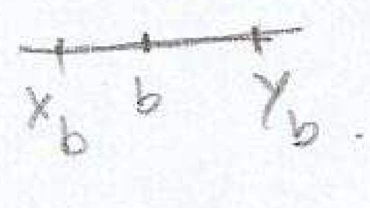
Supongo $f'(c)=0$ Entonces $\underset{x\neq y}{f(y)=f(x)}\Rightarrow$ no inyectiva $\Rightarrow$ ABS

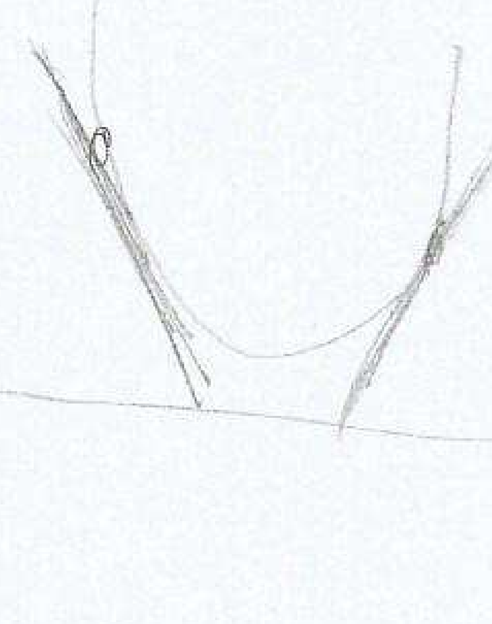
$\Rightarrow f'(c)>0$ o $f'(c)<0$ ⟶ $\Rightarrow$ decreciente

$\boxed{y-x>0}\Rightarrow f'(c)>0 \iff f(y)-f(x)>0\Rightarrow f(y)>f(x)\Rightarrow$ creciente

c)







$$\frac{f(y_a)-f(x_a)}{y_a-x_a}=f'(a)<0$$

$f(y_b)<f(x_a)$

$f(y_b)<f(x_b)$

$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

∇f_x

∇f_y

$\nabla f=(f_x,f_y)$

② Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Probar que si $H_f(P) = 0$ $\forall P \in \mathbb{R}^n$, entonces f es una función Lineal.

Sea P un punto genérico de $\mathbb{R}^n$. Como $f \in C^2$, podemos aplicar el Teorema de Taylor con resto de Lagrange. O sea $\exists c \in B_r(P)$ tal que

$$f(x) = f(P) + \langle \nabla_f(P) \cdot (x-P) \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x-P)^T \cdot \underbrace{H_f(c)}_{0} \cdot (x-P)}$$

Por hipótesis, Como $H_f(c) = 0$, se anula todo este término

$$\Rightarrow f(x) = f(P) + \langle \nabla_f(P) \cdot (x-P) \rangle$$

Con lo cual $f(x)$ es una función lineal

③ Sea T la transformación $\begin{cases} u = e^x \cdot \cos(y) \\ v = e^x \cdot \operatorname{sen}(y) + \frac{1}{2} \cdot e^x \end{cases}$

Verificar que existe un entorno alrededor del $(0,0)$ donde esta transformación es inversible y calcular $\cancel{\frac{\partial T^{-1}}{\partial u}(1, 1/2)}$ $\frac{\partial Y}{\partial u}(1, 1/2)$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. $T(x,y) = (e^x \cdot \cos(y),\ e^x \cdot \operatorname{sen}(y) + 1/2\, e^x)$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (e^x \cdot \cos(y),\ e^x \operatorname{sen}(y) + 1/2\ e^x)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (-e^x \operatorname{sen}(y),\ e^x \cos(y))$$

Las cuatro son composición de funciones continuas, así que las 4 son continuas $\Rightarrow T \in C^1$

Además, $\frac{\partial T}{\partial y}(0,0) = (0, 1) \neq 0$

$\Rightarrow$ Por Teorema de la Función inversa, existe un entorno alrededor de $(0,0)$ tal que T es inversible.

$$D_{F^{-1}}(F(x)) = (D_F(x))^{-1} \Rightarrow D_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \operatorname{sen}(y) \\ e^x \operatorname{sen}(y) + 1/2\, e^x & e^x \cos(y) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

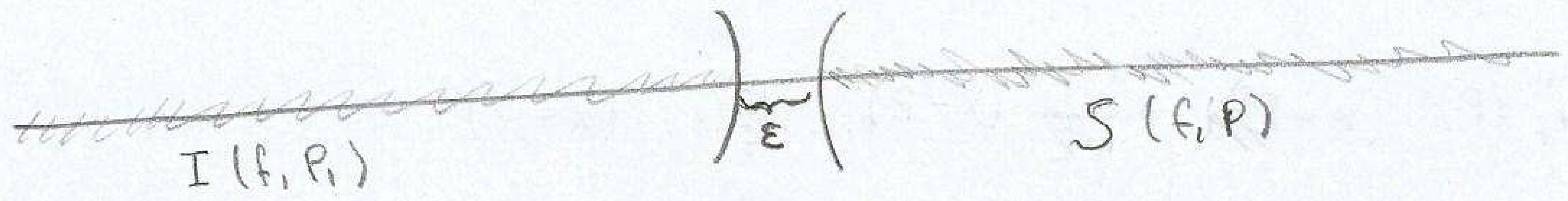
$$T^{-1}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v))$$

$$D_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial u}(1, 1/2) = -1/2}$$

④ Sea $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon>0$ $\exists P$ partición de $[a,b]\times[c,d]$ tal que

$$S(f,P)-I(f,P)<\varepsilon.$$

Probar que f es integrable



Quiero Probar f integrable $\Leftrightarrow I_*(f)=I^*(f) \Leftrightarrow \sup\{I(f,P): P \text{ part}\}=\operatorname{Inf}\{\dots\}$.

•) $\sup\{I(f,P): P \text{ partición}\} \leq \operatorname{Inf}\{S(f,P): P \text{ partición}\}$

Dado que toda suma superior es menor o igual a toda suma superior, por propiedades de supremo e ínfimo, $\sup\{I(f,P)\} \leq \operatorname{Inf}\{S(f,P)\}$.

$$\Rightarrow \operatorname{Inf}\{S(f,P): P \text{ part}\} - \sup\{I(f,P): \text{Part}\} \geq 0$$

•) En base a lo anterior,

$$0 \leq \inf(S(f,P)) - \sup(I(f,P)) \leq S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \inf(S(f,P)) - \sup(I(f,P)) = 0$$

$$\Rightarrow \inf(S(f,P)) = \sup(I(f,P))$$

$$\Rightarrow I^* = I_*$$

$\Rightarrow$ f integrable