Segundos Parciales

Análisis I - Análisis Matemático I – Matemática 1 - Análisis II (C)

Matemática - Química - Física - Ciencias de la Atmósfera - Oceanografía - Computación

Escrito y editado por: Gabriel R. (Estudiante de Lic. en Ciencias Matemáticas – FCEN UBA)

Website: FDXMATHS.COM   Facebook: FACEBOOK.COM/FDXMATHS

Introducción

En este documento te ofrezco algunos **segundos parciales** tomados en cuatrimestres anteriores en la materia de: **Análisis I, Análisis Matemático I, Matemática 1 ó Análisis II (C)**, para las carreras de: Matemática, Química, Física, Ciencias de la Atmósfera, Oceanografía y Computación. Esta materia se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

También te muestro los temas que entran para el final y la bibliografía recomendada por los docentes. Si buscás más info de la materia visitá la página oficial desde: http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/

Podés encontrar más parciales en la fotocopiadora del Pabellón I (de ahí los saqué).

Programa de la Materia

http://cms.dm.uba.ar/academico/lic/programas/Analisis_I_M

1) EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
   Puntos críticos y extremos de una función. Formas cuadráticas, matriz asociada. Análisis de los puntos críticos en varias variables a partir del Hessiano: máximos, mínimos, puntos de ensilladura. Extremos ligados: extremos de una función sobre un conjunto dado por una ecuación G = 0. Condición para que un punto sea punto crítico. Multiplicadores de Lagrange.
2) INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES
   Repaso: integral definida, sumas de Riemann, Teorema fundamental del cálculo, regla de Barrow. Integrales impropias: definiciones, propiedades, criterios de convergencia, convergencia absoluta. Aplicación: convergencia de series. La integral doble sobre rectángulos. La integral doble sobre regiones más generales. Cambio del orden de integración: Teorema de Fubini. La integral triple. El Teorema de Cambio de variables. Aplicaciones de las integrales dobles y triples.

Régimen de Aprobación

Para firmar los trabajos prácticos se deben aprobar dos exámenes parciales. Habrá dos fechas de recuperación. En cada fecha se puede recuperar cualquiera de los parciales. Para poder ser incluido en las Actas de Trabajos Prácticos, es necesario haberse inscripto en la materia (a través del Sistema de Inscripciones de la Facultad) y haber completado la encuesta de evaluación docente. Para firmar la materia es necesario haber aprobado los trabajos prácticos y el examen final.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- NORIEGA, R. : Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Docencia
- LAGES LIMA, E. : Curso de análisis, volúmenes 1 y 2.
- MARSDEN, J. y TROMBA, A. : Cálculo Vectorial. Tercera edición. Addison-Wesley.
- SPIVAK, M.: Calculus (Cálculo Infinitesimal), Vol I y II. Ed. Reverte.
- PISKOUNOV, N. : Cálculo diferencial e integral, tomos I y II. Ed. Mir.
- SPIEGEL, M. R. : Cálculo superior (Advanced Calculus). Serie Shaum.
- REY PASTOR, J. , PI CALLEJA y TREJO : Análisis Matemático, Vol. I y II. Ed. Kapelusz.
- APOSTOL, T. : Calculus, Vol. I y II. Editorial Reverte.
- COURANT, R. : Diferential and Integral Calculus. Ed. Interscience
- LAROTONDA, Gabriel. : Cálculo y Análisis. Bajátelo gratis: http://glaroton.ungs.edu.ar/calculo.pdf

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I

Segundo Parcial (10/12/07)

1	2	3	4	5

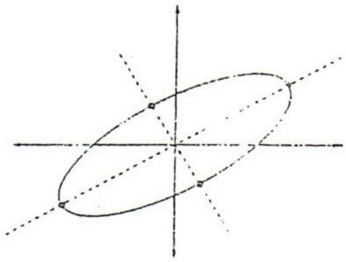
CALIF.

Nombre y apellido: Turno:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

1. Sea $b > 0$ un número real y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 15y - 12bx$$
   a) Encontrar TODOS los posibles valores de b que hacen que f tenga algún punto crítico.
   b) Elegir alguno de los valores de b hallados y hacer un análisis de los puntos críticos para determinar si son extremos locales o puntos de ensilladura.
   c) Analizar la existencia de extremos absolutos.

2. La siguiente es la ecuación de una elipse centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$:
$$15x^2 + 15y^2 + 18xy - 6 = 0$$
Encontrar sus semiejes maximizando y minimizando la distancia entre los puntos de la elipse y su centro.



3. Analizar la existencia de la siguiente integral impropia
$$\int_3^6 \frac{4x^2 \ln(x-2)}{\sqrt{(6x - x^2)(x^2 - 6x + 9)}}\, dx$$

4. Calcular
$$\int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \operatorname{sen}\left(x^2\right)\, dx \right) dy.$$

5. Sea R el rombo de vértices $(2, 0)$, $(0, -1)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$. Hacer un cambio de variables adecuado para calcular
$$\int_R e^{x-2y} \cos(x + 2y)\, dA\,.$$

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA:

TURNO (1-6):
CARRERA:

RECUPERATORIO DEL SEGUNDO PARCIAL

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Segundo cuatrimestre de 2008- 18/12/08

1. Analizar la convergencia de la integral:
$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)\,\mathrm{sen}^2(4x)}{\sqrt{x^9+2x^7+6x^5}}\,dx.$$

2. Sea $f(x,y) = e^{(x-1)^2+(y-2)^2}\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)$.

   a) Hallar los extremos absolutos de f restringida a la región
   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq y\,,\, x+y \leq 4\}$$

   b) ¿Qué se puede decir de los extremos absolutos de f en todo $\mathbb{R}^2$?

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = 2\cos(x-1)e^{3y}$.

   a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en el punto $(1,0)$.

   b) Calcular el siguiente límite:
   $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2\cos(x-1)e^{3y} - 2 - 6y + (x-1)^2 - 9y^2}{y^2+(x-1)^2}$$

4. Consideremos le región $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq 1, z^2 \leq 4(x^2+y^2)\}$.
   Probar que
   $$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{56\pi}{15}.$$

JUSTIFIQUE DEBIDAMENTE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis 2(C)

Curso de verano 2008

Segundo Parcial (14/03/08)

1	2	3	4	5

CALIF.

Nombre y apellido:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Sea $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Encontrar los extremos absolutos de f restringida al conjunto $A = B \cap C$ con

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1\right\} \quad , \quad C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 1\right\}$$

Sugerencia: Recordar que la circunferencia centrada en el origen se puede parametrizar como $\sigma(t) = (\cos(t); \operatorname{sen}(t))$ con $t \in [0; 2\pi]$.

2. Encontrar los puntos de la esfera de ecuación $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ más cercanos y más lejanos al punto $P = (0,0,2)$.

3. Encontrar algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que la siguiente integral sea divergente.

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{|x^3 - (a+2)x^2 + 2ax|}}\, dx$$

4. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \ ; \ \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \ ; \ y - 1 \leq x \leq y + 1\}$. Calcular

$$\int_D 4xy(x+y)\, dA$$

Sugerencia: Dibujar la región y hacer un cambio de variables apropiado.

5. *a*) Calcular el volumen del sólido $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z^2 \leq 1 \ ; y \geq 0\}$.
   b) Sea $0 \leq a \leq 1$ un número real. Considerar el cilindro $C_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq a^2\}$. Encontrar el valor de a que hace que el volumen del sólido $W \cap C_a$ sea la mitad del volumen de W.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Datos útiles:
Recuperatorio del primer parcial: Martes 18 de marzo - 18 a 22 horas - Aula 2 del pabellón II
Recuperatorio del segundo parcial: Jueves 27 de marzo - 9 a 14 horas - Aula 2 del pabellón I

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis II(C)
Curso de verano 2008
Recuperatorio del Segundo Parcial (27/03/08)

1	2	3	4	5

CALIF.

TEMA 2

Nombre y apellido:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^4 - y^2 \geq 0\}$. Considerar además el cuadrado unitario $C = [0,1] \times [0,1]$. Definimos $\Omega = C \cap D$. Calcular la siguiente integral

$$\int_{\Omega} \operatorname{sen}(x^3) \ dA$$

2. Encontrar los puntos del cono $z^2 = (y-2)^2 + (x-1)^2$ más cercanos al origen de coordenadas.

3. Analizar la existencia de la siguiente integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \ dx$$

Sugerencia: Si decide calcular la integral, haga primero el cambio de variables $u = \dfrac{1}{x}$.

4. Encontrar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = 3 - 2x^2 + 4x - y^2 + 3y$$

en el triángulo de vértices $(0,0), (-2,2), (2,2)$.

5. *a*) Calcular la masa del *"anillo"* W definido por las siguientes condiciones:

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ ; \ \frac{1}{3}(x^2+y^2) \leq z^2 \leq 3(x^2+y^2) \right\}$$

con densidad de masa dada por $\rho(x,y,z) = z$.

b) Calcular las coordenadas del centro de masa de W.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis II (C)
Primer cuatrimestre de 2009
Segundo Parcial (04/07/09)

1	2	3	4	5

CALIF.

TEMA 2

Nombre y apellido:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Hallar un punto de la elipse de ecuación $x^2 + xy + 2y^2 + x + 4y - 54 = 0$ tal que la suma de sus coordenadas sea máxima.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 + 1$.

   a) Encontrar todos los extremos locales de f en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$. Analizar la existencia de extremos absolutos en D.

   b) Encontrar los máximos y mínimos absolutos de f en $\overline{D}$.

3. Analizar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}^3(4x)|}{\sqrt{3x^9 + x^7}}\, dx.$$

4. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le e, \ln(x) \le y \le 1\}$. Calcular la integral:

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi(x-1)}{2e^y - 2}\right) dA.$$

5. Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge \frac{1}{2}\}$. Calcular la integral triple:

$$\iiint_W \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV.$$

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO-COMISIÓN:

NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS 1

Recuperatorio del Segundo Parcial - 11/12/2010

---

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = (x^2y + 3x^2y^2 - 8x - 2y, xy^2)$$

  a) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1,1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-6,1) \in V$ y una inversa para F, $F^{-1} : V \to U$ de clase C^1 tal que $F^{-1}(-6,1) = (1,1)$.

  b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 5$ y $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Calcular $\frac{\partial (goF^{-1})}{\partial v}(-6,1)$.

2. Clasificar los puntos críticos de $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + y^2 - 2xy - \frac{x}{2} - y$. En caso de poseer extremos, decidir si son absolutos.

3. Sean los conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x| + 1\}$ y B el disco cerrado de centro $(0,2)$ y radio 1. Hallar los puntos del conjunto $C = A \cap B$ más cercanos y más lejanos al punto $(2,1)$.

4. Analizar la convergencia de la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+5)\cos^4(x)}{x^4 + \sqrt{x}}\, dx.$$

5. Calcular

$$\iint_D \frac{1}{-x+y} dxdy$$

donde D es la región limitada por las rectas $y = x + 3$, $y - x = 5$, $2x + y = 0$, $4x + 2y = 4$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre: Turno-Comisión:

No. de libreta: Carrera:

Análisis I

Segundo Parcial - Tema 1 - Primer Cuatrimestre 2010 - 10/07/2010

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x,y) = (5\text{sen}(x) + y^3, 2\cos(y) + y).$$

   a) Demostrar que existe un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(0,0) \in U$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(0,2) \in V$ y una inversa para F, $F^{-1} : V \to U$ de clase C^1 tal que $F^{-1}(0,2) = (0,0)$.

   b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $g(x,y) = e^x - \cos(x) + 3\,\text{sen}(y)$. Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva dada en forma implícita por $g \circ F^{-1}(x,y) = 0$ en el punto $(0,2)$.

2. Sea

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Encontrar puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales y puntos de ensilladura.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 1$

   a) Hallar los extremos locales de f en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9; x + y > -3\}$ y analizar la existencia de extremos absolutos en D.

   b) Hallar, si existen, los extremos absolutos de f en $\overline{D}$.

4. a) Calcular $\displaystyle\int_D e^{2x-y}\,(y+3x)^2\,dxdy$, donde D es la región limitada por las rectas: $y = 2x + 2,\ y = 2x - 2,\ y = -3x + 7,\ y = -3x + 3.$

   b) Calcular el volumen del solido limitado por las superfices $z = x^2 + y^2 - 1$ y $z = 1 - x^2 - y^2$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Tema A

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO-COMISIÓN:
NÚMERO DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS I

Segundo Parcial - 3/12/2011

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$$

Hallar todos los puntos críticos de f y determinar si cada uno de ellos es un máximo local, un mínimo local o un punto de ensilladura.

2. Sea $f(x, y) = 3x^2 + 27y^2 - x + 1$.

   a) Decidir si f tiene extremos absolutos en $\mathbb{R}^2$ y en caso de que existan, encontrarlos.

   b) Decidir si f tiene extremos absolutos en

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, \ x + 3y \geq 0\}$$

   y en caso de que existan, encontrarlos.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y + (y-3)^2 - 4, (\ln x + 4)y - 4)$.

   a) Probar que existe una inversa de f definida en un entorno del punto $p = (-2, 8) = f(1, 3)$, diferenciable en p.

   b) Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable tal que $Dh(1, 3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
   Sea $g(x, y) = h \circ f^{-1}(x, y)$. Calcular $Dg(-2, 8)$.

4. a) Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{3x^2 + 3\cos(x)} dx$$

   b) Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ el paralelogramo de vértices $(6, 5), (4, 3), (6, 1)$ y $(8, 3)$. Calcular

$$\iint_P \frac{\ln(x + y)}{x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

Tema D

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO-COMISIÓN:
NÚMERO DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS I

Segundo Parcial - 3/12/2011

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$$

Hallar todos los puntos críticos de f y determinar si cada uno de ellos es un máximo local, un mínimo local o un punto de ensilladura.

2. Sea $f(x,y) = 3x^2 + 27y^2 - x + 1$.

a) Decidir si f tiene extremos absolutos en $\mathbb{R}^2$ y en caso de que existan, encontrarlos.

b) Decidir si f tiene extremos absolutos en

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1,\ x + 3y \geq 0\}$$

y en caso de que existan, encontrarlos.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (xy^{\frac{3}{2}} + (x-2)^2 - 5, (ln\, y + 5)x - 3)$.

a) Probar que existe una inversa de f definida en un entorno del punto $p = (-3,7) = f(2,1)$, diferenciable en p.

b) Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable tal que $Dh(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Sea $g(x,y) = h \circ f^{-1}(x,y)$. Calcular $Dg(-3,7)$.

4. *a*) Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2x})}{x^2 + \cos(x)} dx$$

b) Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ el paralelogramo de vértices $(6,5), (4,3), (6,1)$ y $(8,3)$. Calcular

$$\iint_P \frac{\ln(x+y)}{x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NÚMERO DE LIBRETA:

TURNO-COMISIÓN:
CARRERA:

ANÁLISIS I

Segundo Recuperatorio del Segundo Parcial - 17/12/2011

1. Sean $f(x,y) = -x^2 + 2y^3 + 3y^2$ y $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+2)^2 \leq 4, y \geq |x| - 4\}$.
Hallar, si existen, los máximos y mínimos absolutos de f en R.

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$F(x,y) = (\sin(xy) + e^y, x + x^2 y + y^2 \cos(xy) - 1).$$
   a) Probar que F admite una inversa de clase C^1 en un entorno del punto $(1,0)$.
   b) Sea $G = F \circ F + F^{-1}$. Calcular la matriz $DG(1,0)$.

3. a) Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia
$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{(1+3x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$
   b) Calcular el volumen de la región encerrada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 16$ en el recinto $\{(x,y) : y \geq x\}$.

4. Utilizando integrales dobles, calcular el volumen de la pirámide de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$ $(0,-1,0)$ y $(0,0,1)$.
Ayuda: ¿Qué plano pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$?

Justificar todas las respuestas

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO Y AULA:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Recuperatorio del Segundo Parcial - 18/7/11

1. Sea E el elipsoide definido por

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x^2 + y^2 - 2xy + z^2 = 1\right\}.$$

Encontrar los puntos $p \in E$ más cercanos y más lejanos del eje y.

Sugerencia: *Recuerde que para calcular la distancia de un punto p a una recta L, se calcula el plano π perpendicular a la recta L que pasa por el punto p. Luego, la distancia buscada es la distancia del punto p a la intersección del plano π con la recta L.*

2. Sea $F(x, y, z) = 4x^2 - \cos(y) + z + e^z$.

   a) Probar que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ admite un despeje de clase C^1 del tipo $z = \phi(x, y)$ en un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ del punto $(0, 0)$ tal que $\phi(0, 0) = 0$.

   b) Suponiendo que se sabe que ϕ es de clase C^2, probar que $(0, 0)$ es un máximo local de ϕ.

3. Analizar la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin(1-x)}{(e^x - 1)(1-x)^2}\, dx.$$

4. Dado P el paralelogramo de $\mathbb{R}^2$ cuyos vértices son $(-1, -2), (1, 2), (0, -1), (-2, -5)$. Calcular el volumen bajo el gráfico de la función no negativa $f(x, y) = \cos[(-3x + y)(2x - y)](2x - y)$ sobre el paralelogramo P.

Análisis I - Matemática I - Análisis II (c)

Verano — 2011

Recuperatorio del segundo parcial

1
2
3
4
5

Apellido y nombre: ....

Comisión: .... L.U.: .... Páginas: ....

1. Para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2,$$

encontrar los puntos críticos y analizar la existencia de máximos y mínimos locales y puntos de ensilladura.

2. Sea

$$f(x,y) = \left(\ln(b^2x^2 + a^2y^2 + 1), e^{bx-ay}\right)$$

   a) Encontrar los valores de a y b para los cuales la función f resulte inversible en el punto (a,b).
   b) Tome $a = b = 1$ en f obteniendo $f(x,y) = \left(\ln(x^2+y^2+1), e^{x-y}\right)$. Pruebe que existe un único punto (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) = (0,1)$ y muestre que no se puede aplicar el teorema de la función inversa en dicho punto. ¿Por qué esto no contradice dicho teorema?

3. Encontrar máximos y mínimos (si existieren) de la función $f(x,y) = xy$ restringida al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1,\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$.

4. Calcular el volumen de la región acotada por $z = x^2 + 2y^2$ y $z = 1 + y^2$.

5. Calcular

$$\int_D (x+y)e^{x^2-xy-2y^2}\,dA,$$

donde D es el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,-1)$ y $(3,0)$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

TEMA 2

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Segundo Parcial - 07/07/2012

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y, z) = z^3 - 2yz + x$.

   a) Probar que la ecuación $f(x, y, z) = 0$ define una función $z = \phi(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(1, 0)$, tal que $f(x, y, \phi(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en dicho entorno.

   b) Suponiendo ahora que ϕ es de clase C^2, determinar su polinomio de Taylor de orden 2 alrededor del punto $(1, 0)$.

2. Encontrar extremos de la función $f(x, y) = xy + 3$ en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1,\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$. ¿Son absolutos? Justificar debidamente la respuesta.

3. Probar que si $\alpha > 1$ la integral

$$\int_2^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{|\sin(x-3)|}{x^\alpha(x^2 - 6x + 9)}}\, dx$$

   converge.

4. Hallar el volumen del sólido encerrado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = -4x + 2y + 4$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

TEMA 1

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO:

NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Primer Recuperatorio - Segundo Parcial - 14/07/2012

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el punto $(0,0)$ es $P(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$. Si $a \in \mathbb{R}$ definimos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $g(x,y) = e^{f(x,y)} + af^2(x,y) + a^2xy$. Probar que para todo $a \in \mathbb{R}$ la función g tiene un punto crítico en $(0,0)$. Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ decidir si el punto crítico es o no un extremo.

2. Hallar los extremos de $f(x,y) = -x^2 + 2y^3 + 3y^2$ en el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq \sqrt{3}x\}$. ¿Son absolutos? Justificar debidamente.

3. Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(x+4)}}{\sqrt{x}(x+4)}\, dx$$

4. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $z^2 = 4x^2+y^2$ y $(z-2)^2 = 4x^2+y^2$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

TEMA 1

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Segundo Recuperatorio - Segundo Parcial - 21/07/2012

1. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 en $(1,2)$ de la función $f(x,y)=\frac{y^2}{1+x}$. Verificar que el error cometido al aproximar f mediante su polinomio de Taylor en $B((1,2);10^{-1})$ es menor a 10^{-1}.

2. Hallar los extremos de $f(x,y)=3x^2+27y^2-x+1$ en el conjunto $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{9}x^2+y^2\leq 1,\ y^2-1\leq x\}$. ¿Son absolutos? Justificar debidamente.

3. Para cada $p\in\mathbb{R}_{>o}$ analizar la convergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}+1}{\sqrt{x}(x+2)^p}dx.$$

4. Sea R el rombo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ y $(-1,1)$. Hacer un cambio de variables adecuado para hallar el valor de la siguiente integral

$$\iint_R \sin(x-y)(x^2+2xy+y^2)\,dxdy.$$

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

2/6

1	2	3	4	Calificación

NOMBRE: TURNO DE PRÁCTICA:
LIBRETA: CARRERA:

Tema B

Análisis I - Matemática 1 - Análisis matemático I - Análisis II (C)
Segundo Parcial
6 de Julio de 2013

Ejercicio 1. Sea R la región de los puntos del semicírculo de radio 5 con centro en $(0,0)$ que se encuentran por debajo de la recta $x = 2y$.
Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 8x$ en R.

Ejercicio 2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x,y) = (x^3 e^{x-1} y + xy, e^{x^2-1} y^4 + x^5)$$

a) Demostrar que existe un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ del $(1,0)$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ del $(0,1)$ y una inversa $F^{-1} : V \to U$ de clase C^1 tal que $F^{-1}(0,1) = (1,0)$.

b) Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que la ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(1,0,h(1,0))$ es $z = 3 - 2x + 10y$. Hallar el plano tangente al gráfico de $h \circ F^{-1}$ en el punto $(0,1,1)$.

Ejercicio 3. Analizar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)(x+2)^2}{3x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Ejercicio 4. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.
Calcular

$$\int\int_D e^{\frac{x^2}{4}+y^2}\, dx\, dy$$

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

NOMBRE:
LIBRETA:

TURNO DE PRÁCTICA:
CARRERA:

Tema D

Análisis I - Matemática 1 - Análisis matemático I - Análisis II (C)
Segundo Parcial
6 de Julio de 2013

Ejercicio 1. Sea R la región de los puntos del semicírculo de radio 5 con centro en $(0,0)$ que se encuentran por debajo de la recta $x = 2y$.
Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = -2x^2 + y^2 - 8y$ en R.

Ejercicio 2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x,y) = (x^3 e^{x-1} y + xy, e^{x^2-1} y^4 + x^5)$$

a) Demostrar que existe un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ del $(1,0)$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ del $(0,1)$ y una inversa $F^{-1} : V \to U$ de clase C^1 tal que $F^{-1}(0,1) = (1,0)$.

b) Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que la ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(1, 0, h(1,0))$ es $z = 3 - 2x + 10y$. Hallar el plano tangente al gráfico de $h \circ F^{-1}$ en el punto $(0,1,1)$.

Ejercicio 3. Analizar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)(x+4)^2}{2x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Ejercicio 4. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{25} \leq 1\}$.
Calcular

$$\int\int_D e^{x^2 + \frac{y^2}{25}}\, dx\, dy$$

Justifique todas sus respuestas.

Tema C

1	2	3	4	Calificación

NOMBRE: TURNO DE PRÁCTICA:
LIBRETA: CARRERA:

Análisis I - Matemática 1 - Análisis matemático I - Análisis II (C)
Segundo Recuperatorio del Segundo Parcial
20 de Julio de 2013

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = x^3 + y^2 + axy$.

a) Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$, hallar todos los puntos críticos; para cada uno de ellos, decidir si es un máximo local, un mínimo local ó un punto silla.

b) Llamemos g a la función anterior con $a = 1$: $g(x, y) = x^3 + y^2 + xy$. Analizar la existencia de extremos absolutos de g en la región cerrada y acotada cuyo borde es el cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$.

Ejercicio 2. Probar que existen un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, \frac{\pi}{2})$ y un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $I = (\pi - \epsilon, \pi + \epsilon)$ tal que la ecuación

$$(x + 1)^2 - 3\cos(y) + \cos(xz) + \ln(x^2y^4 + 1) + e^{\operatorname{sen}(z)} - 3 = 0$$

define implícitamente una función de clase C^1, $z = g(x, y) : U \longrightarrow I$. Hallar

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ejercicio 3. Analizar la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}dx.$$

Ejercicio 4. Sea $D = \{(x, y) : x \geq \sqrt{3},\ x^2 + y^2 \leq 4\}$; calcular la integral

$$\int\int_D \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

Justifique todas sus respuestas.

Análisis I / Matemática I / Análisis Matemático I / Análisis 2 (C)

Curso de Verano 2013 - Recuperatorio del Segundo Parcial (21/3/2013)

1	2	3	4

CALIF.

Nombre y apellido:

No. de documento: No. de libreta:

---

1. Determinar los extremos absolutos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = y^2 + \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{x^2+y^2+1}$$

sobre el dominio

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

2. Analizar la convergencia de la siguiente integral :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{(x+1)^{3/2}x^{1/2}}dx$$

3. Probar que la relación

$$xy^2z - z\log(x) - z^2 + 9x^3 = 0$$

define una función implícita de clase C^1 $z = g(x,y)$ en un entorno de $(1,0)$. Dar la ecuación del plano tangente al gráfico de g en $(1,0,3)$.

4. Sea

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2 \leq z^2, \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ z \geq 0\}.$$

Calcular la integral

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\, dxdydz$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS