FINAL DE ÁLGEBRA I
(17-06-22)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"Erguida, serás otra que vivirá mañana..."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Encuentre y pruebe una fórmula cerrada para la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$a_5 = 22 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + na_1 \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Resolución:

Calculemos los primeros términos de la sucesión para intentar conjeturar una fórmula cerrada para ella. Tenemos que

$$a_5 = a_4 + 4a_1 \Rightarrow 22 = a_4 + 4a_1 \Rightarrow a_4 = 22 - 4a_1 \Rightarrow a_3 + 3a_1 = 22 - 4a_1$$

$$\Rightarrow a_3 = 22 - 7a_1 \Rightarrow a_2 + 2a_1 = 22 - 7a_1 \Rightarrow a_2 = 22 - 9a_1 \Rightarrow a_1 + 1a_1 = 22 - 9a_1$$

$$\Rightarrow 11a_1 = 22 \Rightarrow a_1 = 2$$

, y por lo tanto,

$$a_2 = a_1 + 1a_1 = 2 + 1 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 4 + 2 \cdot 2 = 8$$

$$a_4 = a_3 + 3a_1 = 8 + 3 \cdot 2 = 14.$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$$a_1 = 2 = 1 \cdot 0 + 2$$

$$a_2 = 4 = 2 \cdot 1 + 2$$

$$a_3 = 8 = 3 \cdot 2 + 2$$

$$a_4 = 14 = 4 \cdot 3 + 2$$

$$a_5 = 22 = 5 \cdot 4 + 2$$

, conjeturamos que $a_n = n(n-1) + 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usamos inducción para probar la conjetura. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n) : a_n = n(n-1) + 2.$$

Veamos que vale $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ se tiene que $a_1 = 2$, y por lo tanto $a_1 = 1(1-1) + 2$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos verdadera $P(n)$ y veamos que lo es $P(n+1)$. Tenemos que

$$a_{n+1} = a_n + na_1 = n(n-1) + 2 + 2n = n^2 - n + 2 + 2n = n^2 + n + 2 =$$

$$= (n+1)n + 2 = (n+1)((n+1) - 1) + 2$$

, como se quería probar (en la segunda igualdad usamos la hipótesis inductiva y que $a_1 = 2$).

Probados el caso base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Ejercicio 2

Pruebe que si a es impar y $7 \nmid a$, entonces $(3a^4 - a^3 : a + 7) \in \{2, 22\}$.

Resolución:

Sea $d := (3a^4 - a^3 : a + 7)$. Tenemos que

$$d \mid 3a^4 - a^3 \ \text{ y } \ d \mid a + 7 \Rightarrow d \mid 3a^4 - a^3 \ \text{ y } \ d \mid 3a^4 + 21a^3 \Rightarrow \quad d \mid 22a^3$$

$$d \mid 22a^3 \ \text{ y } \ d \mid a + 7 \Rightarrow d \mid 22a^3 \ \text{ y } \ d \mid 22a^3 + 154a^2 \Rightarrow \quad d \mid 154a^2$$

$$d \mid 154a^2 \ \text{ y } \ d \mid a + 7 \Rightarrow \quad d \mid 154a^2 \ \text{ y } \ d \mid 154a^2 + 1078a \Rightarrow \quad d \mid 1078a$$

$$d \mid 1078a \ \text{ y } \ d \mid a + 7 \Rightarrow \quad d \mid 1078a \ \text{ y } \ d \mid 1078a + 7546 \Rightarrow \quad d \mid 7546.$$

Luego, d es un divisor positivo de $7546 = 2 \cdot 7^3 \cdot 11$, y por lo tanto, para probar que $d \in \{2, 22\}$, habrá que probar que $2 \mid d$ y que $7 \nmid d$.

Como a es impar resulta

$$3a^4 - a^3 \equiv 3 \cdot 1^4 - 1^3 \equiv 3 - 1 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$a + 7 \equiv 1 + 7 \equiv 0 \pmod{2}$$

, y por lo tanto $2 \mid d$.

Por otro lado,

$$a + 7 \equiv a \pmod{7}$$

, y como por hipótesis $7 \nmid a$ resulta que $7 \nmid a + 7$, y por lo tanto $7 \nmid d$.

Se concluye así que $d \in \{2, 22\}$.

■

Ejercicio 3

Sean $n \in \mathbb{N}$ par y w y z dos raíces n-ésimas de la unidad. Pruebe que $(z + w)^{n/2}$ es real o imaginario puro.

Resolución:

Sea $u = (z + w)^{n/2}$. Notemos que u es real si y sólo si $Re(u) = u$, y que u es imaginario puro si y sólo si $Re(u) = 0$. Veamos entonces que $Re(u) = u$

o $Re(u) = 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
Re(u) &= \frac{u+\overline{u}}{2} \\
&= \frac{(z+w)^{n/2} + \overline{(z+w)^{n/2}}}{2} \\
&= \frac{(z+w)^{n/2} + (\overline{z}+\overline{w})^{n/2}}{2} \\
&= \frac{(z+w)^{n/2} + (z^{-1}+w^{-1})^{n/2}}{2} \\
&= \frac{(z+w)^{n/2} + (\frac{z+w}{zw})^{n/2}}{2} \\
&= (z+w)^{n/2}\left(\frac{1+(\frac{1}{zw})^{n/2}}{2}\right) \\
&= u\left(\frac{1+(\frac{1}{zw})^{n/2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

, y por lo tanto, $Re(u) = u$ es equivalente a $(zw)^{n/2} = 1$ y $Re(u) = 0$ es equivalente a $(zw)^{n/2} = -1$.

Por ser w y z raíces n-ésimas de la unidad existen $0 \leq j,\ k \leq n-1$ tales que

$$w = e^{\frac{2j\pi}{n}i} \quad \text{y} \quad z = e^{\frac{2k\pi}{n}i}.$$

Entonces,

$$(zw)^{n/2} = (e^{\frac{2k\pi}{n}i}e^{\frac{2j\pi}{n}i})^{n/2} = (e^{\frac{2(j+k)\pi}{n}i})^{n/2} = e^{(j+k)\pi i}$$

, lo que implica que $(zw)^{n/2} = 1$ si $j+k$ es par y $(zw)^{n/2} = -1$ si $j+k$ es impar.

Se concluye así que $(z+w)^{n/2}$ es real o imaginario puro.

$\blacksquare$

Ejercicio 4

Encuentre todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ para los que el polinomio

$$X^5 + 15aX^4 + 12bX^3 - 18X^2 - 1$$

tiene una raíz racional. Pruebe además que, para cualesquiera de los a y b hallados, esta raíz es única y tiene multiplicidad 1.

Resolución:

Sea $f = X^5+15aX^4+12bX^3-18X^2-1$. Como $a, b \in \mathbb{Z}$ resulta $f \in \mathbb{Z}[X]$. Luego, por el lema de Gauss, las únicas posibles raíces racionales de f son 1 y -1.

Por un lado tenemos que

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 15a + 12b - 18 - 1 = 0 \Leftrightarrow 15a + 12b = 18 \Leftrightarrow 5a + 4b = 6$$

, ecuación diofántica cuyo conjunto solución es

$$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a = 2 + 4k \ \text{ y } \ b = -1 - 5k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Por otro lado tenemos que

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow -1 + 15a - 12b - 18 - 1 = 0 \Leftrightarrow 15a - 12b = 20$$

, ecuación diofántica que no tiene solución pues $(15 : -12) = 3 \nmid 20$.

Entonces, la única posible raíz racional de f para $a, b \in \mathbb{Z}$ es 1, y lo es si y sólo si $(a, b) = (2 + 4k, -1 - 5k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Veamos ahora que $mult(1, f) = 1$. Para eso usamos el polinomio derivado de f.

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$f'(x) = 5X^4 + 60(2 + 4k)X^3 + 36(-1 - 5k)X^2 - 36X$$

, y por lo tanto,

$$f'(1) = 5 + 60(2 + 4k) + 36(-1 - 5k) - 36 = 60k + 89 \neq 0$$

pues $k \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $mult(1, f) = 1$.

■