PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Práctica 5

1. En una línea de producción los productos pasan por 4 procesos sucesivos (preparación, armado, control y embalaje) hasta quedar listos para la venta. Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 los tiempos que tarda en cumplirse cada uno de los procesos (en minutos). Se sabe que los cuatro procesos actúan en forma independiente y que $X_1 \sim U(3,5)$, $X_2 \sim N(3,1/4)$, $X_3 \sim \Gamma(6,3)$ y $X_4 \sim U(2,4)$. Sea Y la variable aleatoria que mide el tiempo que tarda un producto en pasar por toda la línea de producción. Hallar $E(Y)$ y $V(Y)$.

2. a) Sea X una v.a. con distribución desconocida tal que $E(X) = 5$ y $V(X) = 0.1$. Usando la desigualdad de Tchebyshev, determinar una cota inferior para la probabilidad de que X esté entre 4.5 y 5.5.

   b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria (v.a. independientes e idénticamente distribuídas), con $E(X_1) = 5$ y $V(X_1) = 0.1$, y sea $\bar{X}$ su promedio. Determinar una cota inferior, cuando $n = 10$, para la probabilidad de que $\bar{X}$ esté entre 4.5 y 5.5.

   c) ¿Qué pasa con la cota hallada en (b) cuando el tamaño de la muestra n tiende a infinito?

3. El número de aviones que aterrizan en un aeropuerto sigue un proceso de Poisson con intensidad de 10 aviones cada 20 minutos. Determinar una cota inferior para la probabilidad de que el número de aviones que aterrizan en un período de 1 hora esté entre 20 y 40.

4. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la pena de muerte. Para estimar p se encuesta a n personas, se cuenta la cantidad de ellas que apoya la pena de muerte (X) y se define la frecuencia relativa

$$f_n = \frac{X}{n}$$

Cuanto más cerca esté f_n de p, mejor estimador será.

   a) Hallar una cota superior para $P(|f_n - p| > 0.1)$ que no dependa de p. ¿ Cómo se puede mejorar la estimación?

   b) ¿A cuánta gente debería encuestarse para que $P(|f_n - p| > 0.1) \leq 0.1$?

5. Sea $X_1,\ X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Sea $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Probar que si $\sigma_i^2 = \sigma^2 < \infty$ (todas tienen la misma varianza), entonces $\overline{X}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ en probabilidad.

   b) Probar que si las varianzas son distintas, pero están acotadas, es decir que existe C tal que $\sigma_i^2 \leq C$ para todo i, entonces $\overline{X}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ en probabilidad.

   c) ¿ Es cierto el resultado del ítem anterior si las varianzas no están acotadas?

6. Sea $X_1,\ X_2,\ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $P(\lambda)$. Sea $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

   (a) Calcular $E(X_i^2)$.

   (b) Verificar que $Var(X_i^2)$ es finita. (*Sugerencia: utilizar la función generadora de momentos*)

   (c) Calcular el límite en probabilidad de Y_n.

7. Una empresa láctea produce una cierta variedad de queso en unidades cuyo peso (en kg.) es una v.a. con media 2 y varianza 0.04.

   a) Calcular en forma aproximada la probabilidad de que 60 quesos pesen más de 122 kg.

   b) ¿Cuántas unidades serán necesarias para satisfacer un pedido de 5000 kg. con probabilidad mayor o igual que 0.95?

   c) ¿En qué cambiarían los resultados obtenidos en a) y b) si el peso fuera una variable con distribución $N(2, 0.04)$?

8. Sea X una v.a. con distribución $Bi(100, 0.8)$. Usando el Teorema Central del Límite (con corrección por continuidad), calcular en forma aproximada:

$$P(75 \leq X \leq 85) \qquad P(X \geq 80) \qquad P\left(0.7 \leq \frac{X}{100} \leq 0.8\right) \qquad P(X = 80)$$

9. Para rellenar una zona baja del río llegan diariamente 3 camiones A, B y C llenos de piedras. Los pesos en toneladas de las cargas de los camiones son v.a. independientes con esperanzas 1.8, 3.8, 4.1 y varianzas 0.1, 0.18, 0.25 respectivamente.

   a) ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que en 360 días se superen las 3500 t?

   b) ¿Cuánto tiempo será necesario para superar las 3500 t con una probabilidad aproximada de 0.90 por lo menos?

10. Sean $X_1,\ X_2,\ldots,X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad

$$f(x) = \frac{2}{x^3} I_{[1,\infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente

$$P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\right).$$

11. En cierto juego de azar la probabilidad de ganar es 0.3. Para participar en el mismo se paga un peso y, en caso de ganar, se reciben 5 pesos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que en 100 juegos independientes un jugador gane más de 90 pesos?

   b) ¿Cuántas veces tendrá que jugar para ganar más de 90 pesos con probabilidad aproximada mayor o igual que 0.80?

12. Sea $U_1, \ldots, U_n$ una muestra aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0,1]$ y sea h una función continua. Consideremos la integral $I = \int_0^1 h(x)\,dx$.

a) Se define $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h(U_i)$. En base a la Ley de los Grandes Números, explicar por qué I_n puede utilizarse para calcular en forma aproximada el valor de la integral I.

b) Los siguientes datos son una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{U}[0,1]$:

0.635 0.074 0.220 0.746 0.826 0.148 0.821 0.759 0.080 0.929

Usarlos para aproximar
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$
Comparar el resultado obtenido con el valor exacto de esta integral.

c) Extender el método hallado en (a) para el cálculo aproximado de
$$I = \int_a^b h(x)\,dx$$
siendo a y b números reales tales que $a < b$.

13. Consideremos un método de compresión de bases de datos basado en el sistema de codificación de Huffman y supongamos que las bases consideradas sólo pueden contener las letras A, B, C y D. En el método de compresión considerado, se almacenan las letras de la siguiente forma: el bit 1 representa la A, el par de bits 00 representa la B y los tríos 011 y 010 representan a C y D respectivamente. Las bases de datos almacenarán 500 letras (A, B, C o D). Sea X_i el número de bits necesarios para almacenar la i-ésima letra. Se puede asumir que las X_i son independientes (es decir, que hay independencia entre los caracteres involucrados).

Después de cierta investigación se sabe que en las bases de datos consideradas el 70 % de las letras es A, el 12 % es B, el 10 % es C y el 8 % es D.

a) Hallar la esperanza y varianza de la variable X_i, $i = 1, \ldots, 500$. Calcular la esperanza y la varianza del total de bits utilizados al almacenar las 500 letras.

b) Calcular en forma aproximada la probabilidad de que más de 720 bits sean utilizados en total para almacenar las 500 letras.

c) Calcular la probabilidad de que se utilice más de 1.46 bits por letra al almacenar 500 letras.

d) Repetir el ítem anterior para almacenar n letras. Graficar (por ejemplo, en R) esta probabilidad como función de n. ¿Qué se observa?

(1)

1. $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

$E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$

$= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)$

$= 4 + 3 + 2 + 3 = 12$

$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right) \overset{\text{INDEP}}{=} \sum_{i=1}^{4} V(X_i)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{19}{12}$

2.

a) $P(4.5 \leq X \leq 5.5) = P(-0.5 \leq X - 5 \leq 0.5)$

$= P(|X-5| \leq 0.5) = 1 - P(|X-5| > 0.5)$

$\overset{\text{T CHEBYSHEV}}{\geq} 1 - \frac{Var(X)}{(0.5)^2} = 1 - \frac{0.1}{(0.5)^2} = 0.6$

b) $X_1, \dots, X_{10}$ muestra aleatoria

$Var(\bar{X}_{10}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}\right) \overset{ind}{=} \frac{1}{10^2} \sum_{i=1}^{10} Var(X_i)$

$\overset{id}{=} \frac{1}{10^2} 10\, Var(X_1) = \frac{1}{100}$

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}\right) = \frac{1}{10} E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) \overset{id}{=} \frac{1}{\cancel{10}} \cancel{* 10} * E(X_1)$$

$$= 0.5$$

$$P(|\overline{X}_{10} - 5| \leq 0.5) = 1 - P(|\overline{X}_{10} - 5| > 0.5)$$

$$\overset{\text{TCHEBYSHEV}}{\geq} 1 - \frac{Var(\overline{X}_{10})}{(0.5)^2} = 1 - \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{4}} = 0.96$$

ⓒ $$P(|\overline{X}_n - 5| \leq 0.5) \geq 1 - \frac{\frac{Var(X_1)}{n}}{\frac{1}{4}}$$

$$= 1 - \frac{0.4}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$P(|\overline{X}_n - 5| \leq 0.5) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

3. X_t : # aviones que aterrizan en t min

$$X_t \sim \mathcal{P}(0.5t)$$

$$X_{60} \sim \mathcal{P}(30) \qquad E(X_{60}) = Var(X_{60}) = 30$$

$$P(20 \leq X_{60} \leq 40) = P(|X_{60} - 30| \leq 10)$$

$$= 1 - P(|X_{60} - 30| > 10) \overset{\text{TCHEBYSHEV}}{\geq} 1 - \frac{30}{(10)^2} = \frac{7}{10}$$

②

4.

$P(1-P) \leq \frac{1}{4}$

a) $P(|f_n - P| > 0.1) \leq \frac{P(1-P)}{n(0.1)^2} \leq \frac{1}{4n(0.1)^2} = \frac{25}{n}$

Encuestando a más personas

b) $P(|f_n - P| > 0.1) \leq \frac{25}{n} \leq 0.1$

$\frac{25}{n} \leq 0.1$

$n \geq 250$

5.

a)

$\forall \varepsilon > 0 \; P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$

$\Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

b) $\forall i, 1 \leq i \leq n \quad \sigma_i^2 < C$

$$P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{nC}{n^2 \varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{C}{n \varepsilon^2} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

c) No

6.

$$M_{X_1}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(M_{X_1}(t)\right) = e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(M_{X_1}(t)\right) = \lambda\left(e^{\lambda(e^t-1)} \lambda (e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} e^t\right)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(M_{X_1}(t)\right) = \lambda\left(e^{\lambda(e^t-1)} \lambda^2 (e^t)^3 + e^{\lambda(e^t-1)} 2\lambda e^t\right.$$
$$\left. + e^{\lambda(e^t-1)} \lambda (e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} e^t\right)$$

(3)

$$= \lambda e^{\lambda(e^t-1)} e^t \left(\lambda(\lambda^2 (e^t)^2 + 2\lambda + \lambda e^t + 1\right)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(M_x(t)\right) = \lambda\Big[\left(e^{\lambda(e^t-1)} \lambda (e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} e^t\right)\left(\lambda^2 (e^t)^2 + 2\lambda + \lambda e^t + 1\right) + e^{\lambda(e^t-1)} e^t \left(2\lambda^2 e^t + \lambda e^t\right)\Big]$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(M_x(t)\right)\Big|_{t=0} = \lambda\left[(\lambda+1)(\lambda^2+3\lambda+1) + 2\lambda^2 + \lambda\right]$$

$$= \lambda\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + 3\lambda + 1 + 2\lambda^2 + \lambda\right)$$

$$= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda = E(X_1^4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(M_x(t)\right)\Big|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda = E(X_1^2)$$

a) $E(X_1^2) = \lambda^2 + \lambda$

b) $Var(X_i^2) = E(X_i^4) - \left(E(X_i^2)\right)^2$

$$= \cancel{\lambda^4} + 6\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda \cancel{- \lambda^4} - 2\lambda^3 - \lambda^2$$

$$= 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda$$

c) $X_1^2, \dots, X_n^2$ v. a iid

$E(X_i^2) = \lambda^2 + \lambda$ y $Var(X_i^2) < \infty$

$\overset{LGN}{\Longrightarrow} Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} E(X_i^2) = \lambda^2 + \lambda$

7.

Q_i = peso del queso i en Kg

$Q_1, \dots, Q_{60}$ son iid

$E(Q_1) = 2 < \infty$ $Var(Q_1) = 0.04 < \infty$

Por TCL, $\frac{T_n - nE(Q_1)}{\sqrt{n Var(Q_1)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

$P(\underbrace{\sum_{i=1}^{60} Q_i}_{T_{60}} > 122) = P\left(\frac{T_{60} - 60*2}{\sqrt{60*0.04}} > \frac{122-120}{\sqrt{60*0.04}}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{T_{60} - 120}{\frac{2}{5}\sqrt{15}} \leq \frac{2}{\frac{2}{5}\sqrt{15}}\right) \simeq 1 - \phi(1.29)$

④

$= 0.0985$

b) $T_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i$

$E(T_n) = n E(Q_1) = 2n$

$Var(T_n) = n\, Var(Q_1) = n * 0.04$

$P\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i \geq 5000\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i - 2n \geq \underbrace{5000 - 2n}_{-a_n}\right)$

$[\;]_{-a_n}^{a_n}$

$\geq P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Q_i - 2n\right| < a_n\right) \overset{\text{Tchebyshev}}{\geq} 1 - \frac{n * 0.04}{(5000-2n)^2}$

≥ 0.95

$0.05(5000-2n)^2 - n * 0.04 \geq 0$

$0.2n^2 - 1000.04 + 1250000 \geq 0$

$\frac{1000.04 \pm \sqrt{(-1000.4)^2 - 4 * 0.2 * 1250000}}{8}$

$\frac{1000.04 \pm \sqrt{800.16}}{8}$ $\nearrow 128.59$ $\searrow 121.51$

$n > 2500$

$n = 2501$

c) Serían exactas

8. $X_1, \dots, X_{100}$ iid

$X_i \sim Be(0.8)$

$X = T_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim Bi(100, 0.8)$

$E(X_1) = 0.8 < \infty \quad Var(X_1) = 0.8 * 0.2 = 0.16 < \infty$

Por el TCL $\frac{T_n - nE(X_1)}{\sqrt{n Var(X_1)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

$P(75 \leq X \leq 85) = P(74.5 \leq X \leq 85.5)$

$= P\left(\frac{74.5 - 100 * 0.8}{\sqrt{100 * 0.16}} \leq \frac{X - 100 * 0.8}{\sqrt{100 * 0.16}} \leq \frac{85.5 - 100 * 0.8}{\sqrt{100 * 0.16}}\right)$

5

$$= P\left(-1.38 \leq \frac{X-80}{4} \leq 1.38\right) = P\left(\frac{X-80}{4} \leq 1.38\right)$$

$$- P\left(\frac{X-80}{4} \geq -1.38\right) \overset{TCL}{\simeq} \phi(1.38) - 1 + \phi(1.38)$$

$$= -1 + 2 * 0.9162 = 0.8324$$

$$P(X \geq 80) = 1 - P(X < 80) = 1 - P(X \leq 79)$$

$$= 1 - P(X \leq 79.5) = 1 - P\left(\frac{X-80}{4} \leq \frac{-0.5}{4}\right)$$

$$\overset{TCL}{\simeq} 1 - \phi\left(-\frac{1}{8}\right) = \cancel{1} - \cancel{1} + \phi\left(\frac{1}{8}\right) = \phi(0.13)$$

$$= 0.5517$$

$$P\left(0.7 \leq \frac{X}{100} \leq 0.8\right) = P(70 \leq X \leq 80)$$

$$= P(69.5 \leq X \leq 80.5) = P\left(\frac{69.5-80}{4} \leq \frac{X-80}{4}\right.$$

$$\left.\leq \frac{80.5-80}{4}\right) \overset{TCL}{\simeq} \phi\left(\frac{1}{8}\right) - \phi\left(-\frac{21}{8}\right) = \phi(0.13) - \phi(-2.63)$$

$= \phi(0.13) - 1 + \phi(2.63)$

$= 0.5517 - 1 + 0.9957$

$= 0.5474$

$P(X = 80) = P(79.5 \leq X \leq 80.5)$

$= P\left(\frac{79.5-80}{4} \leq \frac{X-80}{4} \leq \frac{80.5-80}{4}\right)$

$\overset{TCL}{\simeq} \phi(0.13) - \phi(-0.13) = -1 + 2\phi(0.13)$

$= -1 + 2 * 0.5517 = 0.1034$

9. C_i = Peso en toneladas de la carga diaria del camión i $\quad i = A, B, C$

C_A, C_B, C_D indep

$E(C_A) = 1.8 \quad E(C_B) = 3.8 \quad E(C_C) = 4.1$

$Var(C_A) = 0.1 \quad Var(C_B) = 0.18 \quad Var(C_C) = 0.25$

$D_i = C_A + C_B + C_C$ = Carga total en toneladas del día i, $i \in \mathbb{N}$

6

$E(D_i) = 9.7 \quad Var(D_i) = 0.53$

a) $D_1, D_2, \ldots, D_{360}$ v.a iid

$E(D_1) = 9.7 \quad Var(D_1) = 0.53$

Por el TCL, $\dfrac{T_n - n*9.7}{\sqrt{n*0.53}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

$T_{360} = \sum_{i=1}^{360} D_i$

$$P(T_{360} > 3500) = P\left(\frac{T_{360} - 3492}{\sqrt{190.8}} > \frac{3500-3492}{\sqrt{190.8}}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{T_{360} - 3492}{\sqrt{190.8}} \leq 0.58\right) \overset{TCL}{\simeq} 1 - \phi(0.58)$$

$$= 1 - 0.7190 = 0.281$$

b) $P(T_n > 3500) = P(T_n - n*9.7 > 3500 - n*9.7)$

$$\geq P(|T_n - n*9.7| \leq 3500 - n*9.7) \overset{\text{Chevyshev}}{\geq} 1 - \frac{n*0.53}{(3500 - n*0.97)^2}$$

$$\geq 0.90$$

$$0.1(3500 - n*0.97)^2 - n*0.53 \geq 0$$

$$0.09409n^2 - 679.53n + 1225000 \geq 0$$

$$\frac{679.53 \pm \sqrt{(-679.53)^2 - 4 * 0.09409 * 1225000}}{2 * 0.09409}$$

$$\frac{679.53 \pm \sqrt{720.0209}}{2 * 0.09409} \begin{matrix} \nearrow 3753.66 \\ \searrow 3468.47 \end{matrix}$$

$$n \in [361, 3468] \cup [3754, +\infty)$$

$$n = 361$$

10. $Y = \ln X$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y)$$

$$= P(X \leq e^y) = F_X(e^y)$$

$$f_Y(y) = f_X(e^y)\, e^y$$

$$= \frac{2}{(e^y)^{3/2}} \cancel{e^y} \; I_{[1,+\infty)}(e^y)$$

$$= 2e^{-2y} \, I_{[0,+\infty)}(y)$$

$$Y \sim \mathcal{E}(2)$$

$$E(Y) = \frac{1}{2} \qquad Var(Y) = \frac{1}{4}$$

(7)

$X_1, \dots, X_{100}$ v.a. iid

$\ln X_1, \dots, \ln X_{100}$ v.a. iid

$T_{100} = \sum_{i=1}^{100} \ln X_i \qquad E(T_{100}) = 50$

$\qquad\qquad\qquad\qquad Var(T_{100}) = 25$

Por el TCL, $\dfrac{T_n - nE(\ln X_1)}{\sqrt{n\,Var(\ln X_1)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

$$P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\right) = P\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{100} X_i\right) > 55\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} \ln X_i > 55\right) = P\left(\frac{T_{100}-50}{\sqrt{25}} > \frac{55-50}{\sqrt{25}}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{T_{100}-50}{5} \leq 1\right) \overset{TCL}{\simeq} 1 - \phi(1) = 1 - 0.8413$$

$= 0.1587$

11.

X_i: Ganancia en el juego i

x	-1	4
$P_{X_i}(x)$	0.7	0.3

$E(X_i) = -1 * 0.7 + 4 * 0.3 = 0.5$

$E(X_i^2) = (-1)^2 * 0.7 + 4^2 * 0.3 = 5.5$

$Var(X_i) = 5.5 - (0.5)^2 = 5.25$

a) $X_1, \dots, X_{100}$ m a

$E(X_1) = 0.5 \quad Var(X_1) = 5.25$

Por el TCL, $\dfrac{T_{100} - n * 0.5}{\sqrt{n * 5.25}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 90\right) = P\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{525}} > \dfrac{90-50}{\sqrt{525}}\right)$

$= 1 - P\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{525}} \leq 1.75\right) \overset{TCL}{\simeq} 1 - \phi(1.75)$

$= 1 - 0.9599 = 0.0401$

8

b) $P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > 90\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n*0.5 > 90 - n*0.5\right)$ $\underbrace{}_{n > 180}$

$\geq P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - n*0.5\right| \leq 90 - n*0.5\right) \geq 1 - \frac{n*5.25}{(90-n*0.5)^2}$

≥ 0.8

$0 \geq \frac{1}{20} n^2 - 23.25n + 1620$

$\frac{23.25 \pm \sqrt{(-23.25)^2 - 4*\frac{1}{20}*1620}}{2*\frac{1}{20}}$

$\frac{23.25 \pm \sqrt{216.5625}}{\frac{1}{10}}$ $\nearrow 379.66$ $\searrow 85.34$

$n = 181$

12.

a) $U_1, \ldots, U_n$ m a. $U_i \sim U[0,1]$ y

h cont $I = \int_0^1 h(x)\, dx$

$E(h(x)) = \underbrace{\int_0^1 h(x)\, dx}_{\text{h es cont y acot en } [0,1]} \Rightarrow E(h(x)) < \infty$

$$E(h(x)^2) = \int_0^1 (h(x))^2 \, dx < \infty$$

$$Var(h(x)) = E(h(x)^2) - E(h(x))^2 < \infty$$

$U_1, \dots, U_n$ iid

$\Rightarrow h(U_1), \dots, h(U_n)$

Por LGN

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} h(U_i) \xrightarrow{P} E(h(U_1)) = I$$

b) $vec = \{0.635, 0.074, 0.220, 0.746, 0.826, 0.148, 0.821, 0.759, 0.080, 0.929\}$

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1+vec[i]^2} = 0.763873 \simeq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = arctg \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} \simeq 0.78540$$

c) $Y_1, \dots, Y_n$ m a $\quad Y_i = a + (b-a) U_i \sim U[a,b]$

Por LGN (falta ver hipótesis)

$$\frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{h(Y_i)}{n} \xrightarrow{P} \int_a^b h(x) \, dx$$

9

13.

a)

$E(X_i) = 1*0.7 + 2*0.12 + 3*0.18 = \frac{37}{25}$

$E(X_i^2) = 1^2*0.7 + 2^2*0.12 + 3^2*0.18$

$= \frac{14}{5}$

$Var(X_i) = \frac{14}{5} - \left(\frac{37}{25}\right)^2 = \frac{381}{625}$

$T_{500} = \sum_{i=1}^{500} X_i \quad E(T_{500}) = 740$

$Var(T_{500}) = \frac{1524}{5}$

b) $P\left(\sum_{i=1}^{500} X_i > 720\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} X_i - 740}{\sqrt{\frac{1524}{5}}} > \frac{720-740}{\sqrt{\frac{1524}{5}}}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} X_i - 740}{\sqrt{\frac{1524}{5}}} \leq \frac{-20}{\sqrt{\frac{1524}{5}}}\right) \overset{TCL}{\simeq} 1 - \phi(-1.15)$

$= \cancel{1} - \cancel{1} + \phi(1.15) = 0.8749$

c) $P\left(\sum_{i=1}^{500} \frac{X_i}{500} > 1.46\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} \frac{X_i}{500} - \frac{37}{25}}{\sqrt{\frac{381}{312500}}} > \frac{1.46 - \frac{37}{25}}{\sqrt{\frac{381}{312500}}}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} \frac{X_i}{500} - \frac{37}{25}}{\sqrt{\frac{381}{312500}}} \leq -0.57\right)$

TCL

$\simeq 1-\phi(-0.57) = \cancel{1}-\cancel{1}+\phi(0.57)$

$= 0.7157$