FINAL 02/08/11

1) Probar que hay puntos de la curva $x^2 - 2x - y^2 = 1$ que se hallan más cerca del origen. Hallarlos.

2) Probar que si $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en P que se halla en el interior de A, y además f tiene un extremo local en P, entonces $\nabla f(P) = (0,0)$

3) Sea $f: B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde B es una bola abierta. Si $P, Q \in B$, probar que existe un punto C en el segmento que une P con Q tal que

$$f(Q) - f(P) = \langle \nabla f(C), Q - P \rangle$$

4) Sea $A = [0,1] \times [1,2] \times [-1,1]$ y $T(u,v,w) = (u^3 - v^2 + w, u^3 - w, u^3 + 2v^2)$. Hallar el volumen de $T(A)$.

02/08/2011

① Hallar los puntos de $g(x) = x^2 - 2x - y^2 = 1$ más cerca del $(0,0)$

distancia $= d(x^2+y^2)$

$\nabla g = \lambda \nabla d$

$\nabla g = (2x-2, -2y)$

$\nabla d = (2x, 2y)$

$2x - 2 = 2\lambda x$

$y \neq 0$

$2x-2 = -2x$

$4x = 2$

$\boxed{x = 1/2}$

$-2y = 2\lambda y$

$y \neq 0$

$\boxed{\lambda = -1}$

$y = 0$

$\boxed{y=0}$

$g(x) = x^2 - 2x = 1$

$\boxed{\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}}$

$\boxed{y \neq 0}$

$g(x) = (1/2)^2 - 2\,\frac{1}{2} - y^2 = 1$

$= \quad -y^2 = 1 - 1/4 + 1$

$\boxed{y^2 = -7/4 \Rightarrow \text{Abs}}$

$\Rightarrow$ Los puntos son $(1-\sqrt{2}, 0)$, $(1+\sqrt{2}, 0)$

② Probar que $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$ diferenciable en $P \in A^\circ$ y tiene un extremo en $P \Rightarrow \nabla f(P) = 0$

Supongo que es un máximo local $\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in B_\varepsilon(P)$, $f(x) \leq f(P)$.

Supongamos $\nabla f(P) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(P) = (f_x(P), f_y(P))$

Entonces, dado que el gradiente, por definición es la dirección de máximo crecimiento, sabemos que en la dirección $(f_x(P), f_y(P))$ la función crece. O sea

$$\exists\ \varepsilon' / _{x \in (0,\varepsilon')} \quad (f \circ \underbrace{P + \nabla f(P)\,(x-P)}_{g})\,(x) \geq f(P).$$

Dos casos.

$f(P) < f(\underbrace{g(x)}_{\in B_\varepsilon(P)}) \Rightarrow$ Abs. pues P es máximo

$f(P) = f(P) \Rightarrow$ Abs. pues $\nabla f = (0,0)$.

Alicia lo hizo con las derivadas como función de $\mathbb{R}$

02/08/2011

(3) $f: B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable B es una bola abierta. Sean $P, Q \in B$. Probar que $\exists$ $C \in$ segmento que une P con Q tal que

$$f(Q) - f(P) = \langle \nabla_f(C) . Q - P \rangle$$

Segmento $g(t) = (P + t.(Q-P))$ con $t \in [0,1]$.

$\Delta \Rightarrow \exists$ c tal que ---

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad g: [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow f \circ g [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f \circ g (t) = f(g(t)) = f(P + t.(Q-P))$

$\Rightarrow f \circ g(1) = f.(P + Q - P) = f(Q)$

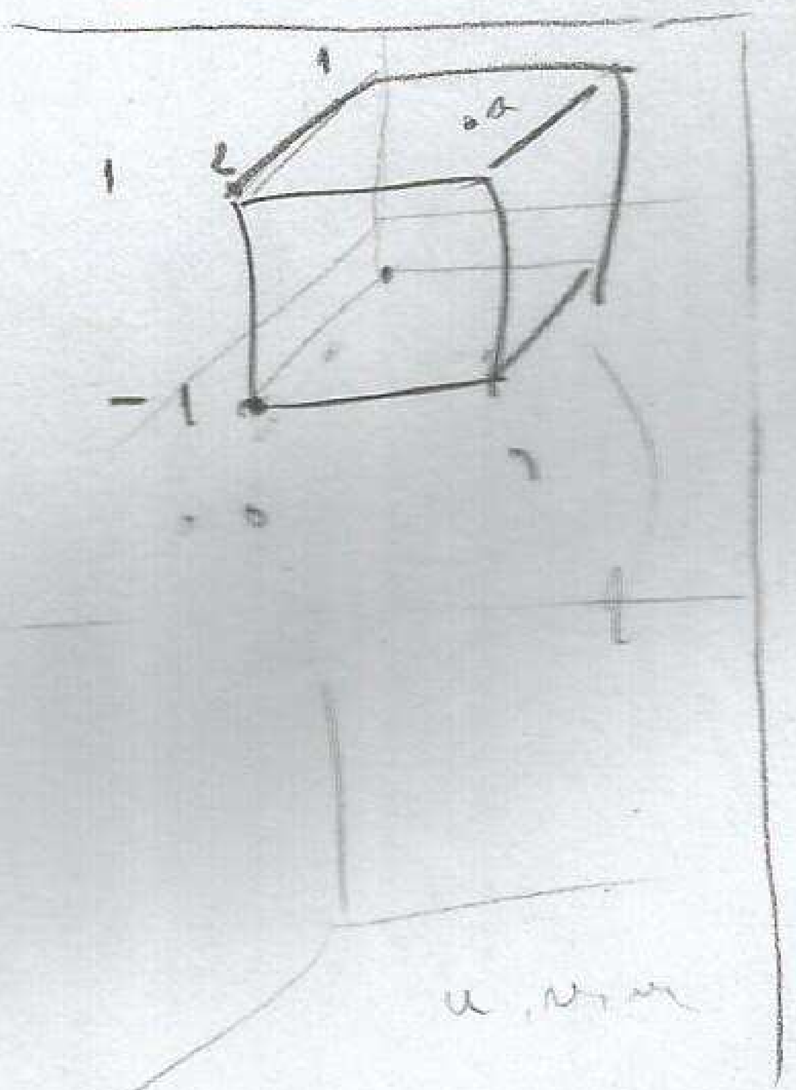
$f \circ g(0) = f(P + 0(Q-P)) = f(P)$.

$(f \circ g)$ es continua por composiciones continuas. $[0,1]$

$(f \circ g)$ es derivable por composición de diferenciables

$\Rightarrow$ Aplico Lagrange a $f \circ g$.

$\Rightarrow \exists$ $c \in [0,1]$ / $f \circ g(1) - f \circ g(0) = (f \circ g)'(c).(1-0)$



$= f(g(1)) - f(g(0)) = f(g(c))'$

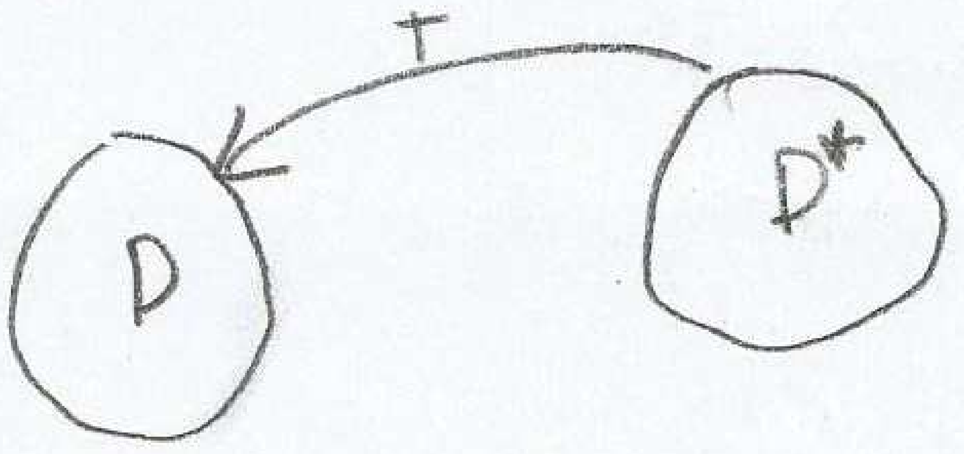
$f(Q) - f(P) = \underbrace{D_f(g(c))}_{1 \times 3} . \underbrace{D_g(c)}_{3 \times 1}$

$f(Q) - f(P) = \nabla_f(g(c)).(Q-P)^T$ $\leftarrow$ $C = g(c)$.

$\boxed{f(Q) - f(P) = \langle \nabla_f(C) . Q - P \rangle}$

(4) Sea $A = \underbrace{[0,1]}_{u} \times \underbrace{[1,2]}_{v} \times \underbrace{[-1,1]}_{w}$ y $T(u,v,w) = (u^3 - v^2 + w, u^3 - w, u^2 + 2v^2)$

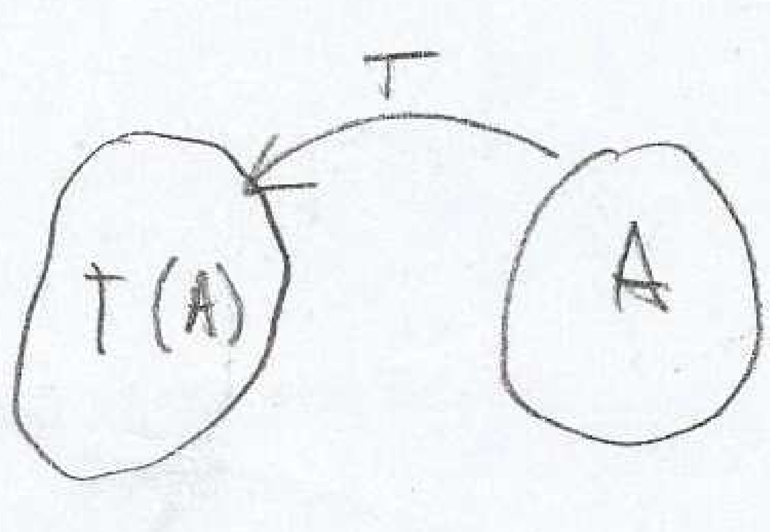
Hallar el vol. de $T(A)$



$D = T(A)$

$D^* = A$

$\Rightarrow$



$$\iiint_D f = \iint_{D^*} f \circ T . J(T).$$

$$\iiint_{T(A)} 1 = \iiint_A 1 \circ T . J_T.$$

$$J_T = \det\begin{pmatrix} 3u^2 & -2v & 1 \\ 3u^2 & 0 & -1 \\ 3u^2 & 4v & 0 \end{pmatrix} = \boxed{30\, u^2 v}$$

$$\begin{matrix} 3u^2 & -2v & 1 \\ 3u^2 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$$3u^2\,4v + 3u^2\,2v + 3u^2\,4v \Rightarrow 12+6+12 = \boxed{30\, u^2 v}$$

$$\Longrightarrow \iint_{T(A)} 1 \, \frac{du\,dv\,dw}{\cancel{dx\,dy\,dz}} = \int_A 1 \cdot J_T \; dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 \int_{-1}^1 30\, x^2 y \; dz\,dy\,dx = 30$$

$$= 30 \cdot 2 \int_0^1 \int_1^2 x^2 y \; dy\,dx = 60 \int_0^1 \frac{x^2}{2} y^2 \Big|_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= 60 \cdot \int_0^1 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 \; dx = \frac{3}{2} \cdot 60 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) = 90 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{30}$$