Exámenes Finales

Análisis I - Análisis Matemático I – Matemática 1 - Análisis II (C)

Matemática - Química - Física - Ciencias de la Atmósfera - Oceanografía - Computación

Escrito y editado por: Gabriel R. (Estudiante de Lic. en Ciencias Matemáticas – FCEN UBA)

Website: FDXMATHS.COM   Facebook: FACEBOOK.COM/FDXMATHS

Introducción

En este documento te ofrezco algunos **finales** tomados en cuatrimestres anteriores en la materia de: **Análisis I, Análisis Matemático I, Matemática 1 ó Análisis II (C)**, para las carreras de: Matemática, Química, Física, Ciencias de la Atmósfera, Oceanografía y Computación. Esta materia se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

También te muestro los temas que entran para el final y la bibliografía recomendada por los docentes. Si buscás más info de la materia visitá la página oficial desde: http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/

Podés encontrar más parciales en la fotocopiadora del Pabellón I (de ahí los saqué).

Programa de la Materia

http://cms.dm.uba.ar/academico/lic/programas/Analisis_I_M

1) TOPOLOGÍA EN R y en R^n.
   Completitud de R. Existencia del supremo y equivalencias. Distancia, discos abiertos y discos cerrados. Puntos interiores. Interior de un conjunto. Conjuntos abiertos. Puntos adherentes. Clausura de un conjunto. Conjuntos cerrados. Conjuntos acotados. Límite de sucesiones de números reales. Límite de sucesiones en R^n y límite en cada coordenada.
2) FUNCIONES DE R^n en R^k (n, k = 1, 2, ...)
   Representación gráfica. Dominio de definición. Curvas y superficies de nivel. Límite de funciones de R^n en R^k. Límite a lo largo de rectas y de curvas. Funciones continuas. Composición de funciones continuas. Propiedades de las funciones continuas.
3) CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES
   Derivadas parciales. Aproximación lineal. Diferencial de una función. Matriz jacobiana. Plano tangente al gráfico de una función. Regla de la cadena. Teoremas generales de la función inversa y de la función implícita. Producto escalar en R^n. Ecuación del plano ortogonal a un vector. Derivadas direccionales. Gradiente. Relación con las superficies de nivel y la dirección de máximo crecimiento. Plano tangente a una superficie de nivel. Teorema del valor medio en varias variables. Derivadas de orden superior. Aproximación polinomial de orden 2. Matriz Hessiana (o Hessiano) de una función.
4) EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
   Puntos críticos y extremos de una función. Formas cuadráticas, matriz asociada. Análisis de los puntos críticos en varias variables a partir del Hessiano: máximos, mínimos, puntos de ensilladura. Extremos ligados: extremos de una función sobre un conjunto dado por una ecuación G = 0. Condición para que un punto sea punto crítico. Multiplicadores de Lagrange.
5) INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES
   Repaso: integral definida, sumas de Riemann, Teorema fundamental del cálculo, regla de Barrow. Integrales impropias: definiciones, propiedades, criterios de convergencia, convergencia absoluta. Aplicación: convergencia de series. La integral doble sobre rectángulos. La integral doble sobre regiones más generales. Cambio del orden de integración: Teorema de Fubini. La integral triple. El Teorema de Cambio de variables. Aplicaciones de las integrales dobles y triples.

Régimen de Aprobación

Para firmar los trabajos prácticos se deben aprobar dos exámenes parciales. Habrá dos fechas de recuperación. En cada fecha se puede recuperar cualquiera de los parciales. Para poder ser incluido en las Actas de Trabajos Prácticos, es necesario haberse inscripto en la materia (a través del Sistema de Inscripciones de la Facultad) y haber completado la encuesta de evaluación docente. Para firmar la materia es necesario haber aprobado los trabajos prácticos y el examen final.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- NORIEGA, R. : Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Docencia
- LAGES LIMA, E. : Curso de análisis, volúmenes 1 y 2.
- MARSDEN, J. y TROMBA, A. : Cálculo Vectorial. Tercera edición. Addison-Wesley.
- SPIVAK, M.: Calculus (Cálculo Infinitesimal), Vol I y II. Ed. Reverte.
- PISKOUNOV, N. : Cálculo diferencial e integral, tomos I y II. Ed. Mir.
- SPIEGEL, M. R. : Cálculo superior (Advanced Calculus). Serie Shaum.
- REY PASTOR, J. , PI CALLEJA y TREJO : Análisis Matemático, Vol. I y II. Ed. Kapelusz.
- APOSTOL, T. : Calculus, Vol. I y II. Editorial Reverte.
- COURANT, R. : Diferential and Integral Calculus. Ed. Interscience
- LAROTONDA, Gabriel. : Cálculo y Análisis. Bajátelo gratis: http://glaroton.ungs.edu.ar/calculo.pdf

Examen final de Análisis II(C)

1) Sea a_n una sucesión de términos positivos. Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ también converge. Probar con un ejemplo que el resultado es falso si los términos a_n no son positivos.

2) Estudiar la diferenciabilidad de la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3) Encontrar el punto de la parábola $y^2 = x, z = 0$ que esté más próximo al plano $z = x + 2y + 8$.

4) Calcular el volumen de la región:
$x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z > 0.$

1	2	3	4

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: L.U.:

Examen final de Análisis II (C)

1. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva tal que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a > 0.$$

Demostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt = a.$$

2. Analizar la existencia del límite en $(0,0)$ de la función $f(x,y) = x \ln(x^2 + y^2)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en (x_0, y_0). Probar que si (x_0, y_0) es un extremo relativo de f entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$.

4. Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Para cada $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ se define la función

$$F(u,v) = (2u + v) \iint_T (ux + vy)\; dx\, dy.$$

Hallar el máximo y el mínimo valor que toma la función F en el recinto

$$\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } 2u^2 + v^2 \leq 1\right\}.$$

ANÁLISIS I - ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA 1 - ANÁLISIS II (C)

FINAL

1	2	3	4

CALIF.

Nombre y apellido: Turno:

N° de documento: N° de libreta:

---

1. Probar que toda sucesión acotada y monótona en $\mathbb{R}$ es convergente.

2. Sea $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

   a) Probar que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $x_n \to +\infty$ y $f'(x_n) \to 0$.

   b) ¿Existe el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

3. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^2. Probar que las derivadas mixtas (cruzadas) de f coinciden en todo punto.

4. *a*) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^{10}+1}$. Decidir para qué valores de $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx < \infty.$$

   b) Hallar una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)f(x)dx < \infty$$

   para todo polinomio p.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS SIN OMITIR DETALLES

FINAL

1	2	3	4

CALIF.

Nombre y apellido: Turno:

N° de documento: N° de libreta:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Notar que f' no es necesariamente continua.

   a) Si f' no se anula en $[a, b]$. Probar que f es inyectiva en $[a, b]$.

   b) Si f es inyectiva, probar que f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

   c) Si existen $a < b$ tales que $f'(a) < 0 < f'(b)$, probar que existe c entre a y b tal que $f'(c) = 0$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Probar que si $Hf(P) = 0$ para todo $P \in \mathbb{R}^n$ entonces f es una función lineal.

3. Consideremos la transformación dada por

$$u = e^x \cos y, \qquad v = e^x \operatorname{sen} y + \frac{1}{2}e^x.$$

   Verificar que existe un entorno del punto $(x, y) = (0, 0)$ donde esta transformación es inversible y calcular $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1, 1/2)$.

4. Sea $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b] \times [c, d]$ tal que

$$S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

   Donde $S(f, P)$ es la suma superior de f asociada a la partición P e $I(f, P)$ es la suma inferior. Probar que f es integrable.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS SIN OMITIR DETALLES

Apellido y Nombre:

L.U.:

Turno:

Final de Análisis I

Primer cuatrimestre de 2001

1. Enunciar y demostrar el Teorema de Lagrange o del valor medio.

2. Enunciar y demostrar el Lema de Abel para series de potencias.

3. Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que existe un disco $D_r(x_0, y_0)$ tal que para todo $(x, y) \in D_r(x_0, y_0)$ existen $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$, y que estas derivadas parciales son continuas en (x_0, y_0). Probar que f es diferenciable en (x_0, y_0).

4. Consideremos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (\cos(xy) + y, x + x^2y + y^2)$.

   (a) Probar que, en un entorno de $(0, 0)$, F admite función inversa diferenciable.

   (b) Para la función $G = F \circ F + F^{-1}$ definida en un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, 0)$, calcular $DG(1, 0)$.

Análisis I – Matemática I
Final (12 / 12 / 2003)

Apellido y nombre:
L.U. n°:
Carrera:
Cuatrimestre y turno de T.P:

Problema I:

Sea { a_n } una sucesión de números reales tales que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^n$ es convergente. Responda si cada una de las siguientes series es convergente, no convergente, o nada puede asegurarse acerca de su comportamiento. En cada caso justifique su respuesta.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-3)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^3 2^n$

Problema II:

a) Pruebe que existe un rectángulo J = { (x,y) ∈ $R^2 / |x-1| < r,\ |y-1| < r$ } y una única función diferenciable f definida en J tal que:

i) $f(1,1) = 1$

ii) Para todo (x,y) ∈ J se verifica que $(f(x,y))^3 - x(f(x,y))^2 + yf(x,y) - 1 = 0$

b) Calcule las derivadas parciales de f en (1,1).

Problema III:

Considere en R^3 el plano P de ecuación $z = \sqrt{3}$ y Q el gráfico de la función $f(x,y) = sen(x).sen(y).sen(\pi - x - y)$, definida para $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$.

Calcule $d = \inf\left[\|p-q\| / p \in P, q \in Q\right]$

Análisis I – Matemática I
Final (30 / 12 / 2003)

Apellido y nombre:
L.U. n°:
Carrera:
Cuatrimestre y turno de T.P:

Problema I:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente y b_n es una sucesión creciente y acotada , indicar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_{n+1} - b_n)$ es convergente o divergente.

Problema II:

Sea F(x ,y) = e^{x+y}. Hallar un polinomio P(x ,y) que verifique

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - P(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

Problema III:

Si $\alpha > 4$, hallar los máximos y mínimos de $x^2 + y^2 + \alpha xy$ en el triángulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $x + y \leq 1$.

Nota: Justifique sus respuestas y enuncie los resultados teóricos que utiliza.

Análisis I – Matemática I
Final (5/3/2004)

Apellido y nombre:
L.U. n°:
Carrera:
Cuatrimestre y turno de T.P:

Problema I:

Encuentre, si existen, el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = xy$ sobre la bola $x^2 + y^2 \leq 1$

Problema II:

Sea $F : \Re \to \Re$ de clase C^2 una función que cumple que $F(x^2) + F(x) + x^2 = 0$. Calcule

a) $F'(0)$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{F(x)}{x^2}$

Problema III:

Dado $v = (v_1, v_2)$ un vector de $\Re^2$

a) Encuentre una función $f : \Re^2 \to \Re$ de clase C^∞ que cumpla que la dirección de mayor crecimiento en el punto $(2,3)$ sea la dirección de $v = (v_1, v_2)$.

b) Encuentre una función $f : \Re^2 \to \Re$ de clase C^∞ que cumpla que la dirección de mayor decrecimiento en el punto $(2,3)$ sea la dirección de $v = (v_1, v_2)$.

Nota: Justifique *todas* sus afirmaciones

Problema I	Problema II		Problema III	
	a	b	a	b

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

16/3/2004

1. Estudiar la convergencia de $\int_0^1 g(x)dx$ donde $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
   (Sugerencia: derivar $x^{1/2}\ln(x) - 2x^{1/2}$)

2. Probar que si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $p\epsilon\mathbb{R}^3$
   Entonces existen las derivadas direccionales $\frac{df}{dv}(p), v\epsilon\mathbb{R}^3$ y vale:
   $$\frac{df}{dv}(p) = <\nabla f(p), v>$$

3. Demostrar que si
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
   converge $\forall\, x\epsilon\mathbb{R}$ y es una función par $(f(x) = f(-x))$. Entonces $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$

4. Encontrar $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{df}{dx}(0,0) = \frac{df}{dy}(0,0) = 0$; $\frac{df}{dv}(0,0) = 3$ con $v = (1,1)$.

   Probar entonces que f no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

16/7/2004

1. Sean a_n, b_n *con* $n\epsilon\mathbb{N}$ sucesiones de números reales tales que $a_n > 0$, $b_n > 0\ \forall\ n\epsilon\mathbb{N}$.
   Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
   a) Probar
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$
   b) Dar un ejemplo en el que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge y } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$$

2. Sean $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2$ tales que
   a) Existe $\frac{df}{dx}(a,b)$ y $f(a,b) = 0$
   b) g es continua en (a,b)

   Probar que $h(x,y) = f(x,y).g(x,y)$ son derivables parcialmente respecto de x en el punto (a,b).

3. Sea $F(x,y,z) = zy + \text{sen}(xz^3) - 2$
   a) Mostrar que $F(x,y,z) = 0$ define implícitamente una función $\phi(x,y) = z$ en el punto (0,1,2).
   b) Sea g: Dom$(\phi) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = y\phi(x,y)$. Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto (0,1).

4. Hallar el volumen del sólido que está por debajo de la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, arriba del plano $x + z = 2$ y limitado por los planos $y = 0$, $y = 3$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4

CALIF.

NOMBRE / NO. LIBRETA: CARRERA:

Final Análisis I (M) 04/08/2004

1. [T] Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en P y P es un extremo local de f, entonces $\nabla f(P) = (0,0)$.

2. [P] Sea $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$

   (a) Calcular el dominio de definición de f.

   (b) ¿Para qué valores de x resulta f continua?

3. Hallar todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy) & \text{si } x \leq 0 \\ 5x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es diferenciable.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(0,0)$ tal que $\nabla f(0,0) = (a,b)$. Sea $S = \{v \in \mathbb{R}^2 \ / \ \| v \| = 1\}$. Se define la función $\Phi : S \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$\Phi(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0).$$

Hallar $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Justifique sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

Nombre y Apellido: ....

Libreta: .... Carrera: ....

Análisis I — Examen final

Segundo Cuatrimestre de 2005

1	2	3	4	5

1. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es tal que $f(a) < 0 < f(b)$, probar que entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en P y P un extremo local de f. Probar que $\nabla f(P) = 0$.

3. Sea (a_n) una sucesión convergente y $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Analizar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)^n a_n.$$

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1, que satisfacen

   a) $f(0) = g(0)$,

   b) $f'(0) < g'(0)$.

   Probar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{cases} \text{si } 0 < t < \delta & \text{entonces } f(t) < g(t) \\ \text{si } -\delta < t < 0 & \text{entonces } f(t) > g(t) \end{cases}$$

5. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^x - 1)y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   a) Analizar continuidad, existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

   b) Determinar los vectores unitarios $v \in \mathbb{R}^2$ para los cuales $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ alcanza su máximo y su mínimo valor.

Justificar todas las respuestas

Análisis I - EXAMEN FINAL - 2/8/05

1. Probar que toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua alcanza un máximo y un mínimo valor.

2. Para los distintos valores de $p \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)^p$$

3. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable, en donde $A \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto que contiene al segmento P_1P_2. Probar que

$$f(P_2) - f(P_1) = \nabla f(P) \cdot (P_2 - P_1),$$

en donde P es un punto del segmento P_1P_2.

4. i) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x, y, z) = e^{xy} + 4\ln(xz), \qquad g(x, y, z) = 1 - yz^2.$$

Probar que en un entorno del punto $P = (1, 0, 1)$ el conjunto intersección

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z)\}$$

puede describirse como un gráfico $\{(x, y, \varphi(x, y))\}$, en donde φ es una función de clase C^1.

ii) Calcular $\nabla\varphi(1, 0)$.

Análisis II (C)

Examen Final (10/ 3 / 2006)

Nombre: Cuatrimestre:
L.U.: Turno:

Problema I:

Sea $a_n, n \in N$, una sucesión de términos positivos. Supongamos que $\lim a_n = 0$. ¿Qué puede decirse acerca de la convergencia o divergencia de las siguientes series?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{3/2}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, donde $b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$

Problema II:

Dada la función $f(x,y) = y + 1 + e^{x^2 - y - 2x}$

a) Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden alrededor del punto (1,-1).
b) ¿Es (1,-1) un punto crítico?. ¿Es un extremo local?

Problema III:

Sea $B_r = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq r\}$. Pruebe que $F(r) = \iint_{B_r} e^{x^2+y^2}\,dxdy \leq 4e^{r^2}$

Problema IV:

Sea $f(x,y) = 5^{x \ln y}$ y sea $g(u,v) = (e^{uv}, (u^2 + v^2))$. Calcule $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(f \circ g)$

Problema V:

Sea $G(x) = \int_0^x e^{xy}\,dy$. Calcule $G'(1)$

Final de Análisis I

Segundo cuatrimestre de 2006 - 27/12/06

1) Demostrar el criterio de Leibniz para series alternadas.

2) Sea $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable tal que $c(0) = c(1)$. Probar que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $c'(t_0)$ es perpendicular a $c(t_0)$.

3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en un entorno de (x_0, y_0). Probar que f es diferenciable en (x_0, y_0).

4) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = (\cos(xy) + y, x - 3x^2y + y^6)$.

i) Probar que existe un entorno U de $(0,0)$ y un entorno V de $(1,0)$ tales que $F : U \to V$ es biyectiva, con $F^{-1} : V \to U$ diferenciable.

ii) Para la función $G(x,y) = F^{-1}(x^2, x - y^3)$ definida en un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(1,1)$, calcular $DG(1,1)$.

EXAMEN FINAL - 19/04/2007

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I

Apellido y Nombres: .... L.N°:..........

1. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdaderas dar una demostración, caso contrario un contraejemplo:
   - Si $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas, tales que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende uniformemente a una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ es una sucesión que tiende a $l \in [0,1]$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = f(l)$.
   - Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua, y S es el conjunto dado por $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ entonces f está acotada en S (i.e. existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| < M$ para todo $(x,y) \in S$).
2. Probar que si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función tal que $h(x,y) = f(x) + g(y)$, con $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no necesariamente continuas, entonces $h(x,y)$ tiene un máximo local en (x_0, y_0) si y sólo si $f(x)$ tiene un máximo local en x_0 y $g(y)$ tiene un máximo local en y_0.
3. Enunciar y demostrar el Teorema de Encaje de Intervalos.
4. Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) entonces para cualquier vector dirección v (i.e. un vector no nulo de norma 1), vale que $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle$ (producto interno).
5. Enunciar y demostrar el Teorema de Multiplicadores de Lagrange para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas. Solo se pueden citar Teoremas del programa de la materia, cualquier otro Teorema debe ser demostrado. Al citar un Teorema, enunciarlo completamente.

1	2	3	4	5

EXAMEN FINAL - 11/06/2007

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I

Apellido y Nombres: .... L.N°:...........

1. Enunciar y demostrar el Lema de Abel para series de potencias.

2. Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es C^1 en (x_0, y_0) (i.e. ambas derivadas parciales existen y son continuas en un entorno de (x_0, y_0)) entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

3. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *par* si para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que $f(-x) = f(x)$ (por ejemplo la función coseno). Probar que si f es C^4, par y su derivada cuarta satisface $f^{(4)}(0) \neq 0$ entonces f tiene un máximo o un mínimo local en $x = 0$.

4. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Probar que el punto $(1, 0)$ es un máximo local de f como función de dos variables si y sólo si 1 lo es para g. (De forma parecida se puede probar el mismo resultado para cualquier punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ con máximo reemplazado por mínimo también. Notar que en particular los extremos locales de f forman círculos alrededor de $(0, 0)$)

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas. Solo se pueden citar Teoremas del programa de la materia, cualquier otro Teorema debe ser demostrado. Al citar un Teorema, enunciarlo completamente.

1	2	3	4

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

19/2/2008

1. Enunciar y probar el Teorema del Valor Medio para funciones de varias variables.

2. Demostrar el Criterio de D'Alembert (o del cociente).

3. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente positiva. Hallar y clasificar los puntos críticos de:
$$F(x,y) = \int_0^{xy} f(t)\,dt\,.$$

4. Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^1$, tal que $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x,y) \in S^1$, donde:
$$S^1 = \{(x,y):\ x^2 + y^2 = 1\}.$$
Mostrar que $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$J(F)(x,y) = 0,$$
donde $J(F)(x,y)$ es el Jacobiano de F en (x,y).

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

26/2/2008

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ y $f(0) = 1$. Probar que f alcanza su máximo valor.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función acotada y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = xyf(x,y)$. Probar que g es diferenciable en $(0,0)$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $P = (x_0, y_0)$ es un extremo de f. Si f es diferenciable en P, probar que $\nabla f(P) = (0,0)$.

4. Sea $D = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, b > 0\}$. Se define $F\colon D \to \mathbb{R}$, por:
$$F(x;y) = \int_{T(a,b)} \left(\frac{x}{b} - \frac{y}{a}\right) dx\, dy,$$
donde $T(a,b)$ es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,b)$. Hallar el mínimo y el máximo valor que toma F sobre
$$C = \left\{(a,b) \in D : ab = 1, \frac{1}{2} \leq a \leq 2\right\}$$

Justifique todas sus respuestas.

Final de Análisis I

17/6/08

1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en el abierto U. Probar que f es diferenciable en U.

2. Analizar la convergencia y convergencia absoluta de la siguiente integral impropia:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x}\, dx.$$
Sugerencia: para $k \in \mathbb{N}$, estimar el valor de $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{sen(x)}{x}\, dx$.

3. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, y sea
$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}.$$
Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $Im(f) \subset \mathcal{S}$, probar que el jacobiano de f es constantemente nulo.

4. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo valor.

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis II (C)

Examen Final

18 de julio de 2008

1	2	3	4	Calificación

Nombre y apellido:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Probar que $f(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$ ó $f(x,y) < 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

2. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, g es diferenciable y $g(0,0) = 0$. Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.

   Sugerencia: calcular $\nabla g(0,0)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que

$$f(e^t - \cos t + 2, t^2 + 2t + 1) = (-7, 8), \text{ para todo } t \in [-1, 1].$$

   Probar que $\det(Df(2,1)) = 0$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 1 + 3x - y + 2x^2 + xy.$$

   Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 en $(0,0)$ de la función f^2.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis II (C)

Examen Final

25 de julio de 2008

1	2	3	4	Calificación

Nombre y apellido:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|a+bx+cy|}{\|(x,y)\|}$$

Probar que $a = b = c = 0$.

2. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que f es diferenciable (a,b), $f(a,b) = 0$ y g es continua en (a,b). Probar que $h(x,y) = f(x,y).g(x,y)$ es diferenciable (a,b).

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable y $w \in \mathbb{R}^2$, $\|w\| = 1$ tales que $\dfrac{\partial f}{\partial w}(P) = 0$ para todo $P \in \mathbb{R}^2$. Dado $Q \in \mathbb{R}^2$, probar que

$$f\,(Q + t\,w) = f\,(Q) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

4. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua y $\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leq 2\}$. Suponiendo que

$$-\frac{1}{\pi} \leq f(x,y,z) \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{8} \quad \text{para todo } (x,y,z) \in \mathcal{W},$$

probar que

$$-\frac{32}{3} \leq \iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leq \frac{16\pi}{5}.$$

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

ANÁLISIS I - ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA 1 - ANÁLISIS II (C)

FINAL 16/12/2008

1	2	3	4

CALIF.

Nombre y apellido: Turno:

Nº de documento: Nº de libreta:

---

1. Sea $D = [0,1] \times [0,1]$.

   a) Dada una función continua $f : D \to \mathbb{R}$, probar que existe $P \in D$ tal que
   $$f(P) = \int\int_D f$$

   b) Si $g : D \to \mathbb{R}$ es una función C^1 tal que $g(1, y) = 0$ para todo y, probar que existe $P \in D$ tal que
   $$g(P) = -\int\int_D x \cdot \frac{\partial g}{\partial x}.$$

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función C^3.

   a) Probar que si P es un mínimo local de f entonces el Hessiano de f en P es semidefinido positivo.

   b) ¿Es cierto que si el Hessiano de f en P es semidefinido positivo entonces P es un mínimo local de f? Responder dando una demostración o un contraejemplo.

3. Sea $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable tal que $c(0) = c(1)$. Probar que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $c'(t_0)$ es perpendicular a $c(t_0)$. Sugerencia: considerar la función $f(t) = \|c(t)\|^2$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f(0) = 0$. Analizar la convergencia de la integral
   $$\int_1^{+\infty} \frac{f(1/x)}{x^r}\, dx$$
   para $r > 0$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS SIN OMITIR DETALLES

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

FINAL 23/12/2008

1	2	3	4

CALIF.

Nombre y apellido: Turno:

N° de documento: N° de libreta:

---

1. Sea $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Probar que f es integrable.

2. *a*) Enunciar y demostrar el Teorema del valor medio (también llamado Teorema de Lagrange) para funciones de dos variables.

   b) Probar que
$$|e^x\cos(y)-1|\le e^{|x|}\|(x,y)\|.$$

3. Sea $f\colon U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^1 con U abierto. Demostrar que si $P\in U$ es un máximo local de f, entonces $\nabla f(P)=0$.

4. Analizar la convergencia de las siguientes integrales
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x}+2x^4};\qquad \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx.$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS SIN OMITIR DETALLES

ANÁLISIS I - ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA 1 - ANÁLISIS II (C)

FINAL 30/12/2008

1	2	3	4

CALIF.

Nombre y apellido: Turno:

N° de documento: N° de libreta:

---

1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in [a,b]$.

2. Sea $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Sean P y Q dos particiones $[a,b] \times [c,d]$.

   a) Si P es mas fina que Q (o P refina a Q). Probar que
   $$S(f,P) \leq S(f,Q).$$
   Donde $S(f,P)$ es la suma superior de f asociada a la partición P.

   b) Si P y Q son dos particiones cualesquiera, probar que
   $$S(f,P) \geq I(f,Q)$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en P.

   a) Probar que f es continua en P.

   b) Proabar que existen $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que para todo $X \in B_\delta(P)$ vale
   $$|f(X) - f(P)| \leq M\|X - P\|.$$

4. Hallar el vector tangente a la curva σ en $t = -1$ si $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ está definida por
   $$\sigma(t) = (f(1 - t^2, e^{(t+1)^2 + \operatorname{sen}(t^2-1)}), t^3 - 1).$$
   Donde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable tal que la matriz de su diferencial en el punto $(0,1)$ es
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS SIN OMITIR DETALLES

1	2	3	4

CALIF.

NOMBRE / NO. LIBRETA: CARRERA:

Final Análisis I (M) Diciembre 2008

1. Demostrar que toda sucesión de números reales creciente y acotada superiormente es convergente.

---

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $f(0)=0$.

   (a) Demostrar que
   $$\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\leq\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

   (b) Demostrar que si f es de clase C^2 y además $f(1/2)>f(1)>0$ entonces
   $$\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\leq\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

---

3. (a) Probar que si una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0,y_0) entonces es continua en (x_0,y_0).

   (b) Exhibir un ejemplo de una función f que posea ambas derivadas parciales en un punto (x_0,y_0) pero no sea continua en dicho punto. Justificar.

---

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en $(0,0)$ tal que $\nabla f(0,0)=(a,b)$. Sea $S=\left\{v\in\mathbb{R}^2\ /\ \|v\|=1\right\}$. Se define la función $\Phi:S\to\mathbb{R}$ de la manera siguiente:
   $$\Phi(v)=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0).$$

   Hallar $\mathrm{Im}(\Phi)$. Justificar.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis II (C)

Examen Final

15 de mayo de 2009

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido: e-mail:

No. de documento: No. delibreta: Carrera:

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(0,0)$ con $f(0,0) = 2$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = -1$. Hallar números reales a, b tales que la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} f(ax, by), & \text{si } x + y < 0 \\ f(x,y) - 2x - 3y, & \text{si } x + y \geq 0 \end{cases}$$

sea diferenciable en $(0,0)$.

2. *a*) Mostrar que la ecuación $2xe^{y-2} + y + x^2y^3 = 2$ define una función $y = f(x)$ en un entorno de $(0,2)$.

   b) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $g(x) = f(x).\sin x + \cos x$ en el punto $a = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $\nabla f(x,y) . (x,y) > 0$ si $\|(x,y)\| \geq R > 0$. Probar que $f(x,y)$ tiene un mínimo global en $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 y $D = [0,1] \times [0,1]$. Probar que

$$\int_D \left(f_x(x,y) + f_y(x,y)\right) dxdy = \int_0^1 (f(t,1) - f(t,0) - f(0,t) + f(1,t))\, dt.$$

5. Sea $f(x)$ continua en $[0,+\infty)$ tal que $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx < \infty$. Probar que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ó no existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

ANÁLISIS I - ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA I - ANÁLISIS II (C)

FINAL - 1/10/2009

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota

Apellido:

Nombre:

N° de documento:

N° de libreta:

Carrera:

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en P.

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, tal que existe un único punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ con $F(a,b) = 0$. Probar que el gradiente de F en (a,b) es nulo.

   Sugerencia: Usar el Teorema de la Función Implícita.

3. Sea T el interior del triángulo de vértices $(-1,0)$, $(0,-1)$ y $(0,0)$ y consideremos la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x + y$. Hallar el valor máximo y el valor mínimo alcanzados por f en $\overline{T}$ (la clausura de T).

4. Demuestre sólo uno de los siguientes resultados:

   a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es integrable en $[a,b]$.

   b) Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es integrable en $[a,b] \times [c,d]$.

   c) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y sean P y Q dos particiones de $[a,b]$.
   Probar que $S(f,P) \geq s(f,Q)$, donde $S(f,P)$ es la suma superior de Riemann con respecto a P y $s(f,Q)$ la suma inferior de Riemann con respecto a Q.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

ANÁLISIS I - ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA 1 - ANÁLISIS II (C)

FINAL 24/12/2009

1	2	3	4

CALIF.

Nombre y apellido: Turno:

N° de documento: N° de libreta:

---

1. *a*) Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado, probar que existe una sucesión de puntos $x_n \in A$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf A.$$

   b) Sea $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\operatorname{sen}(x)$. Si $A = Im(f)$, hallar $i = \inf A$ y una sucesión como en el ítem anterior.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en P.

   a) Probar que para todo $V \in \mathbb{R}^2$, $\|V\| = 1$ existe la derivada de f en la dirección V en el punto P y vale

$$\frac{\partial f}{\partial V}(P) = \langle \nabla f(P), V\rangle.$$

   b) Probar que existe una dirección V tal que $\frac{\partial f}{\partial V}(P) = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Notar que f' no es necesariamente continua.

   a) Si f' no se anula en $[a, b]$. Probar que f es inyectiva en $[a, b]$.

   b) Si f es inyectiva. Probar que f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Probar que existe c entre a y b tal que $f'(c) = 0$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS SIN OMITIR DETALLES

Tema 1

1	2	3	4

NOTA

NOMBRE: CARRERA: L.U.:

Análisis I / Matemática 1 / Análisis II (C) – Final (03/08/10)

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que si $\nabla f(P) \neq 0$ entonces $\nabla f(P)$ es la dirección de máximo crecimiento de f.

2. Sea $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada. Probar que si para todo $\varepsilon > 0$ existe Π partición del intervalo $[a,b]$ tal que
$$0 \leq S_\Pi(f) - I_\Pi(f) < \varepsilon,$$
donde $S_\Pi(f)$ denota la suma superior de Riemann y $I_\Pi(f)$ la suma inferior, entonces f resulta integrable en $[a,b]$.

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definida implícitamente por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y\sin(x) + xz + \frac{z^2}{2} = \pi^2\}$. Hallar todos los puntos $P_0 \in S$ tales que el plano tangente a S en P_0 sea ortogonal a $(1,0,\pi)$.

4. Sea $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2 + 1\}$ y $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y^2 + 1\}$. Hallar los puntos que minimizan la distancia entre C y C_2.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS 1

Final - 14/12/2010

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Probar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
   b) Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$, existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.
   c) Analizar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ la función f es diferenciable.

2. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ continua y derivable en $\mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(0) = 1$ y $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ para todo $x > 0$.

   a) Probar que la función $g(x) = x - f(x)$ es inyectiva.
   b) Probar que existe un único $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x_0) = x_0$.

3. Para cada valor de $b \in \mathbb{R}$ encontrar el valor máximo y el valor mínimo que toma la función

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{b\,y^2}{2},$$

   en el disco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Sea $g : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_{-1}^{x} e^{-t^2} dt - \int_{-1}^{0} e^{-t^2} dt.$$

   a) Probar que g es una función de clase C^2.
   b) Probar que el polinomio de Taylor de orden 1 de g en $x_0 = 0$ es $P_1(x) = x$.
   c) Encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ el error que se comete al aproximar $g(x)$ por x sea a lo sumo $\frac{1}{100}$.
   d) ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $x_0 = 0$?

5. Encontrar todos los $p \in \mathbb{R}$ tales que existe

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)^p \, dx\,dy$$

   y calcularlo en ese caso.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS 1

Final - 21/12/2010

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Probar que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x,$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que existen las derivadas dobles cruzadas, pero que en $(0,0)$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

   c) ¿Es f una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$?

   d) ¿Es f una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$?

2. *a*) Sea $k > 0$, encontrar el mínimo de la función $f(x,y) = x + y$ sobre el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : xy = k\}.$$

   b) Probar que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x, y > 0$ vale que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

3. Sean $a, b > 0$. Calcular $\iint_E |xy| dxdy$, donde E es la elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $a < b$. Probar que existe $M > 0$ tal que, para todo $x, y \in [a,b]$, se verifica

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq M\big|x - y\big|.$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(1,2) = 0$.

   a) Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua tal que $\gamma(0) = (0,0)$ y $\gamma(1) = (1,2)$. Si $f(0,0) = -1$, probar que existe un punto p en la imagen de γ tal que $f(p) = -1/2$.

   b) Probar que si f es de clase C^1 y $\nabla f(1,2) \neq (0,0)$, entonces existen infinitos puntos $p \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(p) = 0$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO-COMISIÓN:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS 1

Final - 28/12/2010

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Probar que f es diferenciable en $(0,0)$ pero que las derivadas parciales de f no son continuas en $(0,0)$.

2. Probar que: $\sin(x)\sin(y)\sin(z) \leq \frac{1}{8}$, si $0 \leq x, y \leq \pi_2, x+y+z = \frac{\pi}{2}$.

3. Sea $f : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ biyectiva de clase C^2 con inversa también de clase C^2 $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ (se verifica: $g \circ f(x) = x$ y $f \circ g(x) = x$).

   a) Calcular $g''(x)$ para todo $x \in (\alpha, \beta)$ en función de f y sus derivadas.
   b) Si $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ probar que $g''(x) < 0$ para todo $x \in (\alpha, \beta)$.

4. Sea A es un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable, $p = (x_0, y_0) \in A$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v_1}(p) = a, \ \frac{\partial f}{\partial v_2}(p) = b.$$

   a) Calcular $\nabla f(p)$.
   b) ¿Cuánto valen a y b si f tiene un máximo local en p?
   c) Probar que si $(a,b) \neq (0,0)$ el plano tangente al gráfico de f en p nunca es horizontal.

5. Consideremos la función $F : \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y) = \iint_{R_{xy}} e^{(u-1)(v^2-v)}\,du\,dv,$$

donde R_{xy} es el rectángulo dado por $[0,x] \times [0,y]$.

   a) Calcular $F(x,0)$ y $F(0,y)$ para todos los valores de $x, y \geq 0$.
   b) Encontrar $\nabla F(1,1)$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

ANÁLISIS 1

Final - 22/02/2011

1. *a*) Probar que existe la integral impropia $\int_1^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ y calcularla.

b) Probar que la función $F : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ es creciente y acotada.

c) ¿Existe $\int_1^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$?

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Consideremos las siguientes condiciones sobre f:

1) $\nabla f(x_0) = (1, 0)$.
2) La matriz Hessiana $Hf(x_0)$ de f en el punto x_0 es la matriz nula.
3) $\nabla f(x_0) = (0, 0)$.
4) $Hf(x_0)$ es definida negativa.
5) $Hf(x_0)$ es definida positiva.

a) ¿Cuáles de estas condiciones son necesarias para que f tenga un mínimo relativo en x_0?

b) ¿Cuáles son todas las condiciones que *impiden* que f tenga un mínimo relativo en x_0?

c) ¿Es posible encontrar dos o más condiciones que juntas aseguren que f tiene un mínimo relativo en x_0?

3. Pruebe que si la función $u(x, y)$ de clase C^2 satisface la ecuación diferencial de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ entonces la función

$$v(x, y) = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

también la satisface.

4. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F(0, 0) = 1$ y $\nabla F(0, 0) = (1, 1)$.

- ¿Es cierto que existen infinitos puntos (x, y) tales que $F(x, y) = 1$?
- Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2t - 1, t^2 - 1/4)$ y sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función $g(t) = F(\gamma(t))$. Calcular $g'(1/2)$. Probar que g es creciente en un intervalo abierto alrededor del punto $1/2$.

5. Sea b un número real positivo. Calcular el volumen del tetraedro en $\mathbb{R}^3$ delimitado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $2bx + 2y + z = 2b$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANALISIS I

Examen Final- 1/3/2011

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface que:

$$f(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Probar que f es idénticamente cero.

Sugerencia: considerar la función $g(x) = f(x)e^{-x}$

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

 a) Probar que para cada $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = 1$ existe la derivada direccional $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$ y calcularla.
 b) ¿Es F diferenciable en $(0,0)$?

3. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

 i) "Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x)$ es identicamente nula. Entonces f es constante".
 ii) "Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Si f tiene un mínimo local en $(1,3)$ entonces la matriz $Hf(1,3)$ es definida positiva."
 iii) "Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y además $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Entonces f está acotada superiormente en $[1,+\infty)$."

4. Sea $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Consideramos la función $v : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Encontrar una expresión para el Laplaciano de v (definido como $\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$), en la que aparezcan las derivadas de u hasta el orden 2.

5. Calcular la integral $\int\int_R (x-y)^2 dxdy$, donde R es el paralelogramo con vértices $(0,0), (1,1), (2,0)$ y $(1,-1)$ aplicando el cambio de variables $u = x-y, v = x+y$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

11/3/2011

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente creciente, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $\int_a^b f(x)\ dx = 0$ para todo intervalo $[a,b] \subset [0,1]$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

c) Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua. Si la integral impropia $\int_0^\infty f(x)\ dx$ converge, entonces $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-2xy+y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Probar que para cualquier curva $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 [donde $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$] tal que $\alpha(0) = (1,0)$ y $\alpha(t) \neq (1,0)$ para todo $t \neq 0$, la derivada $(f \circ \alpha)'(0)$ existe; pero que sin embargo f no es diferenciable en el punto $(1,0)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, $D = \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \leq 1\}$ el disco unitario cerrado. Supongamos que $f_{/D}$ (f restringida a D) tiene un máximo absoluto en el punto $(1,0)$. Probar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \geq 0$$

4. Sean $p_1 = (1,0)$, $p_2 = (2,3)$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Supongamos que f se anula solo en estos dos puntos, o sea:

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : f(p) = 0\} = \{p_1, p_2\}.$$

Probar que $\nabla f(p_1) = \nabla f(p_2) = (0,0)$.

5. Sea $U : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la función $U(x,y) = log(x^2+y^2)$. Calcular el valor de la integral

$$I = \int\int_C \|\nabla(U)\|^2\ dxdy,$$

siendo $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \|(x,y)\| \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

2/8/2011

---

1. Probar que hay puntos de la curva $x^2 - 2x - y^2 = 1$ que se hallan más cerca del origen. Hallarlos.

2. Probar que si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en P que se halla en el interior de A, y además f tiene un extremo local en P, entonces $\nabla f(P) = (0,0)$.

3. Sea $f : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde B es una bola abierta. Si $P, Q \in B$, probar que existe un punto C en el segmento que une P con Q tal que

$$f(Q) - f(P) = \langle \nabla f(C), Q - P \rangle$$

4. Sea $A = [0,1] \times [1,2] \times [-1,1]$ y $T(u,v,w) = (u^3 - v^2 + w, u^3 - w, u^3 + 2v^2)$. Hallar el volumen de $T(A)$.

Justifique todas sus respuestas.

Análisis I - Análisis Matemático I
Matemática 1- Análisis II (C)

Examen Final - 13-xii-2011

Nombre: L. U.:
Carrera:

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, y una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq 1}$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$
Probar que
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(a, b).$$

2. Enunciar y demostrar el Teorema del Valor Medio para funciones diferenciables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con $f(0) = 0$. Sea
$$F(x, y) = xf(y) + yf(x).$$
   i.- Analizar la diferenciabilidad de F en $(x, y) = (0, 0)$.
   ii.- Probar que si, además, f es creciente, el origen es un punto silla.

4. Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, continua y positiva, tal que
$$\lim_{t\to 0} f(t) = +\infty, \quad y \quad \int_0^1 f(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 f(t)dt < \infty.$$
Mostrar que si $F : B(0, 1) \to \mathbb{R}$ se define como $F(x, y) = f(\|(x, y)\|)$ (donde $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$), entonces
$$\int_{B(0,1)} F(x, y)\, dxdy < \infty.$$

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

2/3/2012

1. Sea $B = B(p, r)$ la bola abierta de centro p y radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $f: B \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\nabla f(x, y) = 0 \;\; \forall\, (x, y) \in B$.
   Probar que f es constante $\forall\, p \in B$.

2. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $p \in A$. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ con f diferenciable en p.

   Probar que f es continua en p.

3. Sean $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables. Llamemos $f = h \circ g$ a su composición y sea $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla g(p) = \vec{0}$.
   a) Probar que p es punto crítico de f.
   b) Si además $Hg(p)$ es definida positiva (Es decir: $\det\big(Hg(p)\big) > 0 \;\wedge\; \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(p) > 0$) y $g(p)$ no es punto crítico de h.
   Decidir sobre la naturaleza de p cómo punto crítico de f.

4. Sea $\mathcal{U}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{C}^1$. Probar que:

$$\int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{U}(x, y)\mathrm{sen}(y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\mathcal{U}}{dy}(x, y)\cos(y)\, dx\, dy$$

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

9/3/1012

1. Enunciar y demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo.

2. Enunciar y demostrar el Teorema del Valor Medio para funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 con $f_y(0,0) \neq 0$. Consideremos la función $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$g(x) = f(x^4 + y^4, e^{3x^2-2y^2} - 1)$$

   Probar que $(0,0)$ es punto crítico de g y decida su naturaleza.

4. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 tal que $\forall t \in \mathbb{R}$ se verifica

$$f\left(\cos^2(t) + \operatorname{sen}(t) - 1, \operatorname{sen}(3t^2)\right) = (-17,5)$$

   Probar que el determinante de la matriz jacobiana de f en $(0,0)$ es igual a 0.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

10/9/2012

1. Demostrar que diferenciabilidad implica continuidad.

2. Enunciar y demostrar el Teorema del Valor Medio (Lagrange) para funciones diferenciables en $\mathbb{R}^n$.

3.
   a) Hallar el Polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de $G(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$.

   b) Calcular
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}\cos(x+y) - 1 + x^2 + y^2}{x^2+y^2}$$

4. Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, derivable en (a,b), $f'(x)$ continua en (a,b) y se anula en solo un punto. Probar que $f(x)$ no se anula en 3 puntos.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

ANALISIS I- MATEMATICA 1 - ANALISIS MATEMATICO I - ANALISIS II(C)

Examen Final- 11/4/2013

1. *a*) Encuentre la ecuación (en forma explícita) $z = T(x,y)$ del plano tangente al gráfico de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{x+y}$ en el punto $(0,0,f(0,0))$.

   b) Demuestre que en un entorno U del $(0,0)$ se verifica que:
   $$T(x,y) \leq e^{x+y} \text{ para todo } (x,y) \in U$$

   c) Supongamos que en un entorno V del $(0,0)$ la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface la desigualdad:
   $$T(x,y) \leq g(x,y) \leq e^{x+y} \text{ para todo } (x,y) \in V$$
   Demostrar que entonces g es diferenciable en $(0,0)$ y calcular $\nabla g(0,0)$.

2. *a*) Sea $f : B \to \mathbb{R}$ diferenciable, donde B es una bola abierta en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que si $\nabla f(a,b) = 0$ para todo $(a,b) \in B$, entonces f es contante en B.

   b) Deducir que si $f, g : B \to \mathbb{R}$ son diferenciables y $\nabla f(a,b) = \nabla g(a,b)$ para todo $(a,b) \in B$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = g(x,y) + c$ para todo $(x,y) \in B$.

3. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Supongamos que f tiene en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un mínimo local. Demostrar que entonces $\nabla f(x_0) = 0$ y que la forma cuadrática
   $$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x_0)\, h_i h_j$$
   (asociada al Hessiano de f en x_0) es semidefinida positiva.

   b) ¿Es cierto que si f es C^2, $\nabla f(x_0) = 0$ y Q es semidefinida positiva, entonces puede afirmarse que f tiene en x_0 un mínimo local?

   Nota: Si le resulta más sencillo puede resolverlo en $n = 2$ (no altera esencialmente la dificultad del ejercicio).

4. Sea $f : (2,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por la integral doble,
   $$f(t) = \int\int_{A_t} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\, dxdy$$
   siendo A_r la región
   $$A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq t\}$$
   Encuentre los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

ANALISIS I- MATEMATICA 1 - ANALISIS MATEMATICO I - ANALISIS II(C)

Examen Final- 9/5/2013

1. i) Demuestre el teorema de Weierstrass: si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado (es decir: compacto) y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua (en K), entonces f es acotada en K, y alcanza su máximo y su mínimo en K

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\}$ es la circunferencia centrada en el origen de radio 1.
¿ Se verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass ? ¿ Cuáles son el máximo y el mínimo de f en K ? ¿En qué puntos se alcanzan ? Justifique su respuesta.

2. i) Enuncie y demuestre el teorema fundamental del cálculo [cómo se calcula $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$] y la regla de Barrow (cómo se calcula $\int_a^b f(x)\,dx$ a partir de una primitiva de f).

ii) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, en un entorno de $x = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideramos

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

Supongamos que f restringida a Q tiene en el punto $(-1,0)$ un mínimo absoluto

i) Demostrar que $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = 0$ y que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) \geq 0$

ii) ¿Puede afirmarse que $\nabla f(-1,0) = (0,0)$? Justifique su respuesta [en caso afirmativo, demuéstrelo; en caso negativo, exhiba un contraejemplo]

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, que verifica las siguientes condiciones:

a) f se anula sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$

b) Si consideramos la función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t+1, e^t)$, entonces la función compuesta $f \circ \alpha$ tiene un mínimo local en $t = 0$.

Calcule el gradiente de f en el punto $(1,1)$

Justifique todas sus respuestas.

Análisis I - Análisis Matemático I Matemática 1- Análisis II (C)

Examen Final - 23/07/2013

Nombre:
L.U.:
Carrera:

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es integrable en $[a, b]$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = f(e^{x^2+y}, \operatorname{sen}(2xy)).$$

Supongamos que el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 0, f(1, 0))$ está dado por $z - 4x + 2y = 1$.

Encontrar la dirección en la que la función $z = g(x, y)$ crece más rapidamente en el punto $(0, 0)$.

3. Sea $P \in \mathbb{R}^2$ un punto en el plano, y $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $F(X) = 0$ si y solo si $X = P$. Probar que $\nabla F(P) = 0$.

4. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto P. Probar que f es continua en P y que existen las derivadas parciales de f en P.

b) Encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en $(0, 0)$ y existen las derivadas parciales de f en $(0, 0)$, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$

Justifique todas sus respuestas.

Análisis I - Análisis Matemático I Matemática 1- Análisis II (C)

Examen Final - 30/07/2013

Nombre:
L.U.:
Carera:

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota

1. Sea $A = \{(n, 1)$ tal que $n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que satisface además la siguiente propiedad: $F(P) = 0$ si y solo si $P \in A$. Probar que para todo $P \in A$ se verifica que $\nabla F(P) = 0$.

2. Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es C^3, $Df(P) = 0$ y $Hf(P)$ es definido positivo, entonces f tiene un mínimo local estricto en P.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Sean $A \subset B \subset \mathbb{R}$, A no vacío, B acotado inferiormente. Entonces $inf(B) \leq inf(A)$.
   b) Sean $A \subsetneq B \subset \mathbb{R}$, A no vacío, B acotado inferiormente. Entonces $inf(B) < inf(A)$

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO-COMISIÓN:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS 1

Final - 13/12/2013

1. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| \leq |xy| + y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es diferenciable en $(0,0)$ y hallar la ecuación del plano tangente en el origen.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f \in C^1$ y $f' > 0$. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) > 0$. Probar que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

es divergente.

3. Probar que dado un punto P en una curva de nivel C de una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla F(P) \neq 0$, entonces $\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva C en el punto P.

4. Probar que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $P \in \mathbb{R}^2$ si y solo si para toda sucesión $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\lim_{k\to\infty} P_k = P$, se verifica $\lim_{k\to\infty} f(P_k) = f(P)$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

24/4/2014

---

1. Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo cerrado I para el cual $f'(x)$ y $f''(x)$ existen para cada $x \in I$. Supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos mutuamente distintos de I tal que continua tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ y tal que $f(x_n) = 0$ para cada n. Probar que $f(y) = f'(y) = f''(y) = 0$.

2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en P.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto crítico de f. Probar que si el hessiano de f en P es definido positivo, entonces f tiene un mínimo local en P.

4. Sean $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos transformaciones lineales tales que los vectores $\nabla f(x,y), \nabla g(x,y)$ son linealmente independientes. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ el dominio limitado por las rectas $f(x,y) = 3$, $f(x,y) = 7$, $g(x,y) = -2$ y $g(x,y) = 2$. Si el área de D es 32, calcular,
$$\int_D e^{f(x,y)} g(x,y)\, dx\, dy.$$

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

10/6/2014

1. Demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in(a,b)$.

2. Sea $f:U\to\mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ en el abierto $U\subseteq\mathbb{R}^2$. Demostrar que f es diferenciable en cada $P\in U$.

3. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ que tiene un máximo relativo en $(2,-1)$ con $f(2,-1)=7$. Sea $g(x,y)=\operatorname{sen}(\pi x)-\cos(\pi y)+3xy^2$. Probar que $f(P)=g(P)$ para infinitos puntos $P\in\mathbb{R}^2$.

4. Sean $f:D\to\mathbb{R}$ una función continua definida en $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica su respuesta:

   a) Si $f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $f(0,0)=0$.
   b) Si $f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y f es diferenciable en D, entonces $\frac{df}{dx}(0,0)=\frac{df}{dy}(0,0)$.
   c) Si f es diferenciable en D, $f(0,0)=0$ y $\{P\in D:\nabla f(P)=(0,0)\}=\{(0,0)\}$, entonces o bien $f\geq 0$ en D, o $f\leq 0$ en D.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

09/09/2014

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. Calcular
$$\iint_D \|\nabla(f)\|^2 \, dx\, dy,$$
siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 2 \leq \|(x,y)\| \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$.

2. Sea $P = (-1,2)$ y sean $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que g es diferenciable en P y su plano tangente en P es $\{z = 0\}$. Si $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, probar que f es diferenciable en P y calcular su plano tangente.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en P si y solo si para toda sucesión Q_n tal que $Q_n \longrightarrow P$, se verifica que $f(Q_n) \longrightarrow f(P)$.

4. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sea de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $f(tP) = tf(P)$ pata todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $P \in \mathbb{R}^2$.
Probar que f es una transformación lineal.
Sugerencia: Estudiar las derivadas direccionales de f en el origen.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

10/12/2014

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, tal que sólo se anula en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Probar que $f(x,y) > 0\ \forall (x,y) \neq (0,0)$, o bien, $f(x,y) < 0\ \forall (x,y) \neq (0,0)$.

2. Sean $g_1, g_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que $f(x,y) = g_1(x) + g_2(y)$. Probar que si g_1 es derivable en $a \in \mathbb{R}$ y g_2 es derivable en $b \in \mathbb{R}$, entonces si f es diferenciable en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = (x-y)^3$. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Hallar, si existen, el máximo y el mínimo valor que toma f en D.

4. Enunciar y demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

23/12/2014

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| \leq |xy| + y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es diferenciable en $(0,0)$ y hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el origen.

2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo su dominio. Sea v un vector de $\mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$. Supongamos que $\frac{df}{dv}(P) = 0 \ \forall P \in \mathbb{R}^2$. Probar que
$$f(Q + tv) = f(Q) \ \forall Q \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que si f alcanza un máximo o mínimo local en el punto P, entonces se cumple que $\nabla f(P) = (0,0)$.

4. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sea D el cuadrado de vértices $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$. Sea $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple la siguiente propiedad: $f(x,y) = g(x-y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Probar que
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} g(v)\,dv$$

Justifique todas sus respuestas.