Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Segundo Parcial (26/11/2022) - 2do. cuatrimetre 2022

TEMA 3

1 (2,5 pts.)	2 (2,5 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	B	B	B-	10

Apellido: [redacted] Nro. de libreta: [redacted] Nro de práctica: 4

Nombre: [redacted] Carrera: Lic. en Ciencias de la Computación

1. Sea $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$.

   (a) Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x,y)$ en el punto $(0,1)$.

   (b) Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2\sin(xy) + 2\cos(xy) - 2 - 2x(y-1) - 2x + 3x^2 + 2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}.$$

2. Sea $f(x,y) = -x^2 + (a-1)y^3 - y^2 + 6xy$.

   (a) Hallar, si existe, $a \in \mathbb{R}$ de modo que $(1, \frac{1}{3})$ sea un punto crítico y decidir si es máximo local, mínimo local o punto silla.

   (b) Para $a = 1$ hallar los extremos absolutos de f restringidos al conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}.$$

3. (a) Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2|\sin x|}{(x^2+1)x^5}\, dx$$

   (b) Dibujar el dominio de integración y calcular

$$\int_{-3}^{0}\int_{-\frac{y}{3}}^{1} \frac{e^{x^2}}{3}\, dx dy.$$

4. Sea W el sólido definido por $x^2 + y^2 \leq z^2,\ \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4,\ \ z \geq 0.$

   Calcular

$$\iiint_W z - 2\, dV.$$

Ejercicio 1:

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$$

(a) Me piden calcular el Polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,1)$.

La forma general de un Polinomio de T. centrado en (x_0,y_0) es:

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \frac{1}{2!}\cdot f_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$

Calculo las derivadas: $f(x,y)$ tiene que ser C^2

$$f_x(x,y) = \cos(xy)\cdot y + (-\operatorname{sen}(xy)\cdot y)$$

$$f_y(x,y) = \cos(xy)\cdot x - \operatorname{sen}(xy)\cdot x$$

$$f_{xx}(x,y) = -\operatorname{sen}(xy)\cdot y^2 + (-\cos(xy)\cdot y^2)$$

$$f_{yy}(x,y) = -\operatorname{sen}(xy)\, x^2 + (-\cos(xy)\cdot x^2)$$

$$f_{xy}(x,y) = -\operatorname{sen}(xy)\cdot x\cdot y + \cos(xy) - \cos(xy)\cdot x\cdot y - \operatorname{sen}(xy$$

$f_x(0,1) = 1 \quad f_y(0,1) = 0 \quad f(0,1) = 1$

$f_{xx}(0,1) = -1 \quad f_{yy}(0,1) = 0 \quad f_{xy}(0,1) = 1$

Armo el Pol. de Taylor de orden 2 de f centrado en $(0,1)$.

$$P_2(x,y) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x(y-1)$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2\,\text{sen}(x+y) + 2\cos(xy) - 2 - 2x(y-1) - 2x + 3x^2 + 2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2 \cdot f(x,y) - 2 - 2x(y-1) - 2x + 3x^2 + 2(y-1)^2}{\|(x,y)-(0,1)\|^2}.$$

Por Propiedad del resto del Polinomio de Taylor, En este caso particular:

- $f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$
- $f(x,y) - P_2(x,y) = R_2(x,y)$

y
- $\dfrac{R_2(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2} = 0$

Entonces sumo y Resto $P_2(x,y)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2f(x,y) + 2P_2(x,y) - 2P_2(x,y) - 2 - 2x(y-1) - 2x + 3x^2 + 2(y-1)^2}{\|(x,y)-(0,1)\|^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2R_2(x,y)}{\|(x,y)-(0,1)\|^2} + \frac{2P_2(x,y) - 2 - 2x(y-1) - 2x + 3x^2 + (y-1)^2 \cdot 2}{\|(x,y)-(0,1)\|^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2\cdot R_2(x,y)}{\|(x,y)-(0,1)\|^2} +$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2P_2(x,y) - 2 - 2x(y-1) - 2x + 3x^2 + 2(y-1)^2}{\|(x,y)-(0,1)\|^2} =$$

$$0 + \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + x(y-1)\right) - 2 - 2x(y-1) - 2x + 3x^2 + 2(y-1)^2}{\|(x,y)-(0,1)\|^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{-x^2 + 2x(y-1) - 2x(y-1) + 3x^2 + 2(y-1)^2}{\|(x,y)-(0,1)\|^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x^2 + 2(y-1)^2}{\|(x,y)-(0,1)\|^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} 2\cdot\frac{\|(x,y)-(0,1)\|^2}{\|(x,y)-(0,1)\|^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} 2\cdot 1 = \boxed{2}$$

Ejercicio 2:

$f(x,y) = -x^2 + (a-1)y^3 - y^2 + 6xy$. $f \in C$

ⓐ Por teorema de Fermat, todos los puntos tales que las derivadas primeras de f sean iguales a 0, son puntos críticos.

Por lo que comienzo derivando f para evaluar en $(1, \frac{1}{3})$ y ver si existe algún a tal que $(1, \frac{1}{3})$ es punto crítico.

Para todo esto f tiene que ser C^2.

$f_x(x,y) = -2x + 6y$

$f_y(x,y) = (a-1)3y^2 - 2y + 6x$

Igualo a 0 y evalúo en $(1, \frac{1}{3})$:

$$-2x + 6y = 0 \qquad (a-1)3y^2 - 2y + 6x = 0$$

$$-2 + \frac{6}{3} = 0 \qquad (a-1)3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot 1 = 0$$

$$-2 + 2 = 0 \qquad (a-1)\frac{3}{9} - \frac{2}{3} + 6 = 0$$

$$\frac{1}{3}a - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 6 = 0$$

$$\frac{1}{3}a + 5 = 0$$

$$\frac{1}{3}a = -5$$

$$\boxed{a = -15}$$

Ahora que encontré a, para determinar si $(1, \frac{1}{3})$ es máximo local, mínimo local, o punto silla, según el criterio del Hessiano, tengo que calcular el determinante de $Hf(1, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1, \frac{1}{3}) & f_{xy}(1, \frac{1}{3}) \\ f_{yx}(1, \frac{1}{3}) & f_{yy}(1, \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$,

ver si este es mayor o menor a cero, y en el caso de ser mayor ver si $f_{xx}(1, \frac{1}{3})$ es mayor o menor a 0.

- $f_{xx}(x,y) = -2$

- $f_{yy}(x,y) = (a-1) \cdot 6y - 2$

  Reemplazo a por -15.

- $f_{yy}(x,y) = -96y - 2$

- $f_{xy}(x,y) = 6$

Entonces $Hf(1, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -34 \end{pmatrix}$

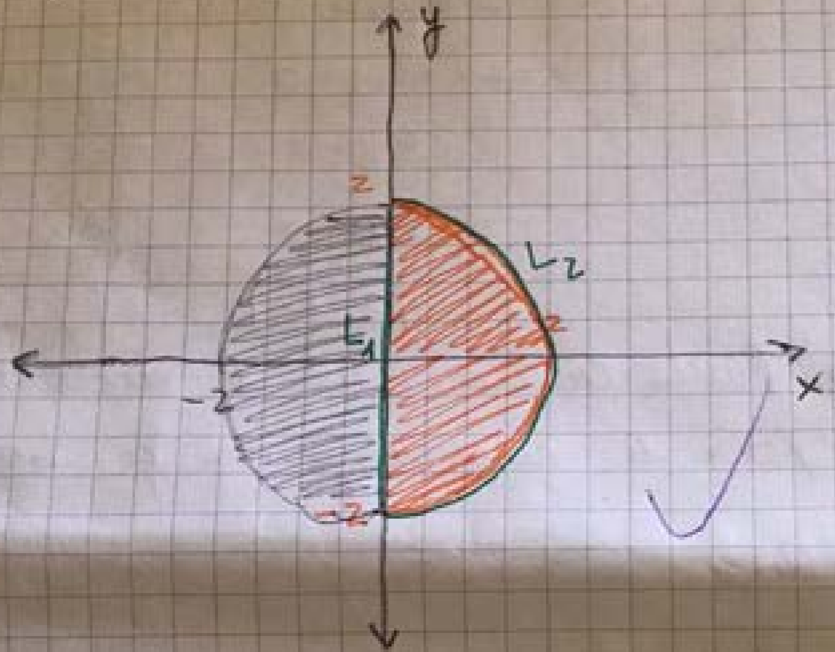
Calculo el $\det(Hf(1, \frac{1}{3})) = -2 \cdot (-34) - 6^2 = \boxed{32}$

Como el determinante es > 0 y $f_{xx}(1, \frac{1}{3}) < 0$, $(1, \frac{1}{3})$ es un Máximo Local.

(b) Reemplazo $a = 1$ en f.

$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 6xy$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$



$x^2 + y^2 \leq 4$ es una circunferencia rellena de radio 2 con centro en $(0,0)$. Como $x \geq 0$, tomo lo de la derecha.

El conjunto A es lo señalado en ▬.
Por el gráfico, puedo ver que A es una región compacta, es decir, cerrada y acotada.
Por el teorema de W, como f está restringida por una región compacta, puedo decir que tiene al menos un mínimo y un máximo absolutos.

Primero miro adentro de la región:

Por teorema de Fermat, todos los puntos tales que las derivadas primeras de f sean iguales a 0, son puntos críticos.

Entonces derivo f:

$f_x(x,y) = -2x + 6y$

$f_y(x,y) = -2y + 6x$

Igualo a 0:

$-2x + 6y = 0$

$6y = 2x$

$3y = x$

$\boxed{0 = x}$

$-2y + 6x = 0$

$-2y + 18y = 0$

$16y = 0$

$\boxed{y = 0}$

Encontré $(0,0)$ como punto crítico, que ~~se encuentra~~ ∉ pertenece a A, pero se encuentra en el borde.

Ahora miro los bordes:

L_1: tomo $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$

$f(0,y) = -y^2$

$f_x(0,y) = 0$

$f_y(0,y) = -2y \Rightarrow -2y = 0$

$\boxed{y = 0}$

Encontré $(0,0)$ como punto crítico ahora sí analizando el borde.

Me queda ver el L_2:
Para este lado quiero usar Lagrange, pero para esto, tengo que ver si $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$.

Tomo g como $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.

$g_x(x,y) = -2x$ $\quad$ $g_y(x,y) = -2y$

$-2x = 0$ $\quad$ $-2y = 0$

$\boxed{x=0}$ $\quad$ $\boxed{y=0}$

$g(x,y) = (0,0)$ cuando $(x,y) = (0,0)$, pero el $(0,0)$ no se encuentra en L_2 por lo que uso Lagrange sin problemas teniendo también en cuenta que $x \geq 0$, y que f y g tienen que ser C^1, ya que ambas funciones las derivo.

Entonces digo que:

$\nabla f(x,y) = \lambda . \nabla g(x,y)$.

(1) $-2x + 6y = \lambda(-2x)$

(2) $-2y + 6x = \lambda . (-2y)$

(3) $x^2 + y^2 = 4$

(1) $\frac{-2x+6y}{-2x} = \lambda$ $\quad$ Supongo $x \neq 0$

(2) $-2y + 6x = \frac{-2x+6y}{-2x} . (-2y)$

$-2y + 6x = \frac{-4xy + 12y^2}{2x}$

$-4xy + 12x^2 = -4xy + 12y^2$

$x^2 = y^2$

(3) $y^2 + y^2 = 4$

$2y^2 = 4$

$y^2 = 2 \longrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Ahora veo que pasa si $x=0$.

(1) $4y=0 \Rightarrow y=0$
(2) $-2y = \lambda.(-2y) \Rightarrow \lambda = 1$

Pero el $(0,0)$ no se encuentra en L_2.

Finalmente los puntos críticos son:
$(0,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y agrego los vertices $(0,-2)$, $(0,2)$.

(Descarté $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ya que $x \geq 0$)

Evaluo todos los puntos en f.

$f(0,0)=0$, $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 8$, $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -16$
$f(0,-2) = -4$ $f(0,2) = 4$.

Finalmente, el máximo Absoluto es $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y el mínimo Absoluto es $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

Ejercicio 3:

ⓐ $$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\operatorname{sen}(x)|}{(x^2+1)\cdot x^5}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^{t} \frac{x^2 |\operatorname{sen}(x)|}{(x^2+1)\cdot x^5}\, dx$$

Por un lado, $0 \leq |\operatorname{sen}(x)| \leq 1$.

Por otro lado $(x^2+1)\cdot x^5 \geq x^5 \rightarrow x^5 \geq \frac{x^5}{(x^2+1)} \rightarrow 1 \geq \frac{1}{(x^2+1)} \rightarrow \frac{1}{x^5} \geq \frac{1}{x^5(x^2+1)}$

Entonces $\frac{1}{(x^2+1)\cdot x^5} \leq \frac{1}{x^5}$

Como $0 \leq |\operatorname{sen}(x)| \leq 1$, $\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{(x^2+1)\cdot x^5} \leq \frac{1}{(x^2+1)\cdot x^5} \leq \frac{1}{x^5}$

y le agrego en ambos lados x^2:

$$\frac{x^2\cdot|\operatorname{sen}(x)|}{(x^2+1)\, x^5} \leq \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$$

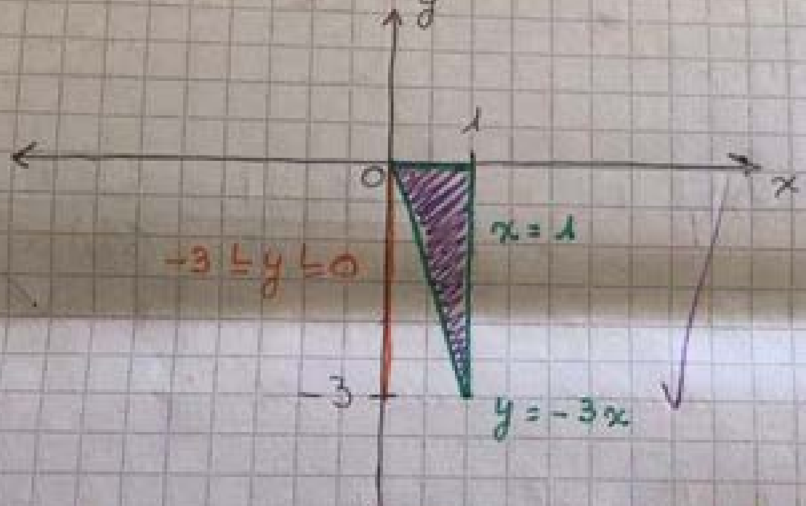
Entonces, Por Criterio de desigualdad y serie p se que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$ converge, ya que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \quad \begin{array}{l} p > 1 \text{ Converge} \\ 0 < p \leq 1 \text{ Diverge.} \end{array}$$

y como $\frac{x^2\cdot|\operatorname{sen}(x)|}{(x^2+1)\cdot x^5} \leq \frac{1}{x^3}$ Puedo decir también que, como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2\,|\operatorname{sen}(x)|}{(x^2+1)\,x^5}\,dx \quad \text{también converge.}$$

6) $$\int_{-3}^{0}\int_{-\frac{y}{3}}^{1} \frac{e^{x^2}}{3}\,dx\,dy$$



$-3 \leq y \leq 0$

$-\frac{y}{3} \leq x \leq 1$

$-\frac{y}{3} = x$

$y = x(-3)$

La región que integro es la

Cambio el orden de Integración porque lo veo mejor:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -3x \leq y \leq 0 \end{cases} \qquad \int_0^1\int_{-3x}^{0} \frac{e^{x^2}}{3}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{e^{x^2}}{3}\cdot y\right]_{y=-3x}^{y=0} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{+e^{x^2}}{3}\cdot 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(e-1)}$$

Nota 10

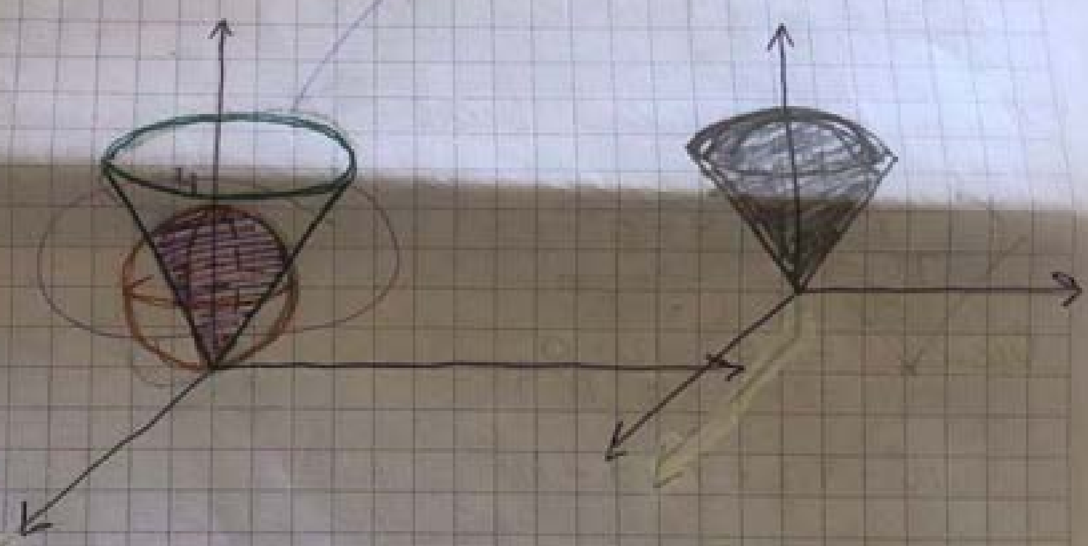
Ejercicio 4:

ω definido por $x^2+y^2 \le z^2$, $x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4$,
$z \geq 0$.

$$\iiint_{\omega} z-2 \, dV$$

Primero intento graficar:

¿Dónde se cortan?



Intento resolver con cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Por un lado, por el gráfico veo que $0 \le \theta \le 2\pi$.

Busco los extremos de z.

$$x^2+y^2=z^2$$

$$r^2=z^2 \longrightarrow \text{Como } z \geq 0, \text{ y } r \geq 0$$

$$r=z.$$

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4$$

$$r^2+(z-2)^2=4$$

$$(z-2)^2=4-r^2$$

$$z-2=\sqrt{4-r^2}$$

$$z=\sqrt{4-r^2}+2$$

$$\underline{r} \leq z \leq \underline{\sqrt{4-r^2}+2}$$

Ahora me queda buscar los extremos de r.

$$r=\sqrt{4-r^2}+2$$

$$r-2=\sqrt{4-r^2}$$

$$(r-2)^2=(4-r^2)$$

$$r^2-4r+4=4-r^2$$

$$2r^2-4r=0$$

$$2r(r-2)=0$$

$$\underline{r=0} \qquad \underline{r=2}$$

r se mueve entre 0 y 2.

La integral queda:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^{\sqrt{4-r^2}+2} (z-2) \cdot r \, dz\, d\theta\, dr$$

Jacobiano.

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_r^{\sqrt{4-r^2}+2}(z-2).r\;dz\,d\theta\,dr =$$

$$\frac{(z-2)^2}{2}\,r$$

La primitiva [illegible]

$$\int_0^2\int_0^{2\pi} r.\left(\frac{z^2}{2}-2z\right)\Bigg|_{z=r}^{z=\sqrt{4-r^2}+2} d\theta\,dr =$$

$$\int_0^2\int_0^{2\pi} r.\left(\frac{(\sqrt{4-r^2}+2)^2}{2}-2\sqrt{4-r^2}-4-\frac{r^2}{2}+2r\right)d\theta\,dr$$

$$=\int_0^2\int_0^{2\pi} r.\left(\frac{8-r^2+4\sqrt{4-r^2}}{2}-2\sqrt{4-r^2}-4-\frac{r^2}{2}+2r\right)d\theta\,dr$$

$$=\int_0^2\int_0^{2\pi} r\left(\cancel{4}-\frac{r^2}{2}+\cancel{2\sqrt{4-r^2}}-\cancel{2\sqrt{4-r^2}}-\cancel{4}-\frac{r^2}{2}+r.2\right)d\theta\,dr$$

$$r\left(-r^2+2r\right)$$

C.A.

$$(\sqrt{4-r^2}+2)^2 = 4-r^2+4\sqrt{4-r^2}+4$$

$$= 8-r^2+4\sqrt{4-r^2}$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\left((2\pi) - r^2\right) \, d\theta \, dr =$$

$$\int_0^2 \left[2r^2 \cdot \theta - r^2 \theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \int_0^2 2\pi\left(2r^2 - r^3\right) dr$$

$$\int_0^2 \left[r^2 \cdot \theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \int_0^2 2\pi r^2 \, dr =$$

$$\left[\frac{2}{3}\pi r^3\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{2}{3}\pi \cdot 8 = \boxed{\frac{16}{3}\pi}$$