Análisis I - Análisis Matemático I - Análisis II (C) - Matemática 1

Exámen Final (25/4/2017)

1	2	3	4

CALIF.

Apellido/s: **De Nápoli**
Nombre/s: **Pablo**

No. de libreta:
Carrera:

---

1. i) Enuncie y demuestre el *teorema de Lagrange* (o teorema del valor medio del cálculo diferencial) para funciones de una variable real.

   Resolución: Este punto es teórico y pueden verlo en cualquier libro de la materia (o en sus carpetas). Por ejemplo en el de Gabriel Larotonda (teorema 3.2.10).

   ii) Úselo para probar la desigualdad

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ con } x \geq 1$$

Nota: Esta es una aplicación bastante típica y directa del teorema de Lagrange. Pueden encontrar ejercicios muy similares en el ejercicio 5 de la práctica 3.

Resolución: Consideramos la función

$$f(x) = \log(1+x)$$

en el intervalo $[0, x]$. Claramente es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$. Por lo que podemos aplicarle el teorema de Lagrange, para concluir que existe un $c \in (0, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = f'(c)$$

o sea:

$$\frac{log(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c}$$

Pero como $c > 0$,

$$\frac{1}{1+c} < 1$$

y se deduce que

$$\frac{\log(1+x)}{x} < 1 \Rightarrow \log(1+x) \leq x$$

---

2. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $p \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que las derivadas direccionales de f existen en p y vienen dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle \nabla f(p), v \rangle$$

   para todo $v \in \mathbb{R}^2$ de norma 1.

   Resolución: Nuevamente este punto es teórico y pueden por ejemplo encontrarlo en el libro de Gabriel Larotonda (teorema 3.2.5) o en sus carpetas.

b) Explique porqué esta fórmula implica que el vector $\nabla f(p)$ da la dirección de máximo crecimiento de f en p (cuando es no nulo).

Resolución: Esto también está en dicho libro. Es la observación 3.2.6 que sigue al teorema.

---

3. a) Estudiar los máximos y mínimos de $f(x, y, z) = xyz$ en el conjunto

$$C_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + z \leq \alpha\}$$

para cada $\alpha > 0$.

Nota: Este es un típico problema de extremos con restricciones para usar multiplicadores de Lagrange. De hecho, ¡ya lo tomamos en algunos finales anteriores!

Resolución: Notemos en primer lugar (y esto es muy importante) que C_α es un conjunto cerrado (ya que viene definido por desigualdades en sentido amplio involucrando funciones continuas) y acotado (si $(x, y, z) \in C_\alpha$ entonces $0 \leq x, y, z \leq \alpha \Rightarrow \|(x, y, z)\| \leq \alpha$). Si hacen el dibujo (lo cual es muy conveniente en este tipo de problemas), notarán que C_α es tetraedro. Se deduce por el *teorema de Weierstrass* que f necesariamente alcanza un máximo y un mínimo en algún punto de C_α.

Notemos que $\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Se deduce que el único punto crítico de f en $\mathbb{R}^3$ es el origen $(0, 0, 0)$, pero este punto no es interior a C_α.

Debemos pues mirar los puntos críticos en el borde de C_α, y estos corresponden a cuando se cumplen algunas de las igualdades en las restricciones que definen a C_α: $x = 0$ o $y = 0$ o $z = 0$ o $x + y + z = \alpha$. Estas ecuaciones corresponden a los planos que definen las cuatro caras del tetraedro.

Si alguna de las coordenadas x, y o z se anula, $f(x, y, z) = 0$ y estos puntos serán obviamente mínimos pues f es no negativa en C_α.

Por otra parte, en la cara que corresponde al plano $x + y + z = \alpha$, podemos usar el teorema de los *multiplicadores de Lagrange*, y obtener que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$$

o sea

$$yz = xz = yz = \lambda$$

Nos interesan las soluciones con todas las coordenadas no nulas (si alguna es cero, ya vimos lo que pasaba). Con lo que se llega (después de operar) a

$$x = y = z = \frac{\alpha}{3}$$

(Notemos que el gradiente de la función que nos da la restricción nunca se anula en este ejercicio.)

Como $(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3})$ es el único punto crítico que obtuvimos, debe ser donde f alcanza su máximo (que ya sabíamos tiene que ser en algún punto).

Evaluamos f para ver cuanto vale este máximo:

$$f\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}\right) = \frac{\alpha^3}{27}$$

b) Deducir la siguiente desigualdad, válida para $x, y, z \geq 0$.:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}$$

Resolución Dados $x, y, z \geq 0$, *elegimos* $\alpha = x + y + z$. Salvo en el caso $x = y = z = 0$ en el que la desigualdad pedida es trivial, $\alpha > 0$. Entonces $(x, y, z) \in C_\alpha$, y por el resultado del ítem anterior:

$$xyz \leq \frac{\alpha^3}{27} = \frac{(x+y+z)^3}{27}$$

Tomando raíz cúbica (lo que mantiene la desigualdad pues la raíz cúbica es una función creciente), se obtiene la desigualdad pedida:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

---

4. La función *gama incompleta* se define para $\alpha, x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y $x \geq 0$ por

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt$$

a) Pruebe que la derivada parcial $\frac{\partial \gamma}{\partial x}(\alpha, x)$ existe si $x > 0$ y calcúlela.

Resolución: La idea de este ítem es usar el teorema fundamental del cálculo para establecer que

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(\alpha, x) = x^{\alpha-1} e^{-x} \tag{1}$$

Hay una única sutileza: La versión que vimos en clase del terema fundamental del cálculo, pide que el integrando sea continuo en el intervalo $[0, x]$. Esto se cumple en este ejemplo si $\alpha \geq 1$.

Cuando $0 < \alpha < 1$, la integral que define $\gamma(\alpha, x)$ es una *integral impropia* (convergente). Todavía se puede probar lo mismo, de la siguiente manera: Fijemos cualquier $x_0 > 0$, supongamos que $x \in [x_0, \infty)$ y partamos la integral que define $\gamma(\alpha, x)$ en x_0

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^{x_0} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt + \int_{x_0}^x t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt \tag{2}$$

Entonces la primer integral es impropia, pero no depende de x. Mientras que la segunda tiene un integrando continuo. Usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene por lo tanto el mismo resultado que antes para $x \in (x_0, \infty)$. Pero como x_0 es arbitrario, se concluye que (1) es válida para cualquier $x_0 > 0$.

Creo que nadie se dio cuenta de esta sutileza, y no bajé puntos en la corrección por ello.

b) Deduzca que si fijamos α, $\gamma(\alpha, x)$ resulta una función continua y estricamente creciente de x.

Resolución: Como $\gamma(\alpha, x)$ es para α fijo una función derivable en $(0, \infty)$, en particular es continua en $(0, +\infty)$.

También es fácil probar que definiendo $\gamma(\alpha, 0) = 0$, resulta continua en 0 pues como $e^{-t} \leq 1$,

$$0 \leq \gamma(\alpha, x) \leq \int_0^x t^{\alpha-1}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^x t^{\alpha-1}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\alpha}(x^\alpha - \varepsilon^\alpha) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$$

Lo que implica que

$$\lim_{x \to 0^+} \gamma(\alpha, x) = 0 = \gamma(0, x)$$

Concluimos que $\gamma(\alpha, x)$ es para α fijo, una función continua de $x \in [0, +\infty)$.

Finalmente, observemos que como por 1, la derivada parcial respecto a x es estrictamente positiva, $\gamma(\alpha, x)$ es para α fijo una función estrictamente creciente.

c) Demuestre que existe el límite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{x \to +\infty} \gamma(\alpha, x)$$

Sugerencia: recuerde que $e^x \geq \frac{x^k}{k!}$ si $x \in \mathbb{R}, x > 0$ y $k \in \mathbb{N}$.

Resolución: Este item equivale (por definición) a probar que la integral impropia

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt \tag{3}$$

es convergente. Di este ejemplo en clase (en la cursada del verano 2017 y anteriores) como un ejemplo importante de integral impropia. De todos modos, la técnica para resolverlo es la usual en los ejercicios de integrales impropias de la materia, y con la sugerencia del enunciado creo que debería salirles.

Para empezar notemos que el integrando en (3) es no negativo. Entonces, la convergencia o no de la integral impropia depende del tamaño del integrando, y podemos usar los criterios de comparación para establecerla.

En este caso, los posibles problemas de la integral son en el cero y en el infinito. Por lo que para separarlos, partimos la integral en dos (por ejemplo en el 1, aunque esto no es esencial):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt$$

La primera integral del segundo miembro la tratamos como en el ítem anterior: como $e^{-t} \leq 1$, tenemos que

$$t^{\alpha-1}\, e^{-t} \leq t^{\alpha-1} \quad \text{si } 0 < t < 1$$

y como la integral impropia

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} dt$$

converge, por el *criterio de comparación*, deducimos que

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt$$

converge.

El tratamiento de la segunda parte es similar, pero hay que usar la sugerencia del enunciado para acotar la exponencial. De la desigualdad

$$e^t \geq \frac{t^k}{k!}$$

de la sugerencia, se deduce que:

$$e^{-t} \leq \frac{k!}{t^k}$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$t^{\alpha-1} e^{-t} \leq k! \cdot t^{\alpha-k-1} \text{ si } t \geq 1$$

y si elegimos $k > \alpha$, la integral impropia

$$\int_1^\infty t^{\alpha-k-1}\, dt = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M t^{\alpha-k-1}\, dt = \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{\alpha - k}(M^{\alpha-k} - 1) = \frac{1}{k - \alpha}$$

será convergente. En consecuencia, por el criterio de comparación,

$$\int_1^{\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt$$

converge.

Concluimos que la integral $\Gamma(\alpha)$ converge para cualquier $\alpha > 0$.

d) Pruebe que para cada $\alpha > 0$ y cada $y \in \mathbb{R}$ con $0 < y < \Gamma(\alpha)$ existe un único $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(\alpha, x_0) = y$.

Resolución: Con todo lo anterior, es una consecuencia del teorema de la función inversa global (en una variable) visto en la materia. Recordemos como es el argumento en este caso.

Como $\gamma(\alpha, x)$ es creciente como función de x tenemos que

$$\Gamma(\alpha) = \sup_{x>0} \gamma(\alpha, x)$$

Si tomamos cualquier y con $0 < y < \Gamma(\alpha)$ entonces existirá (por las propiedades del supremo) algún x_1 tal que $\gamma(\alpha, x_1) > y$. Pero $\gamma(\alpha, 0) = 0$, y para α fijo, $\gamma(\alpha, x)$ es continua como función de x (por el ítem b). En consecuencia, por el *teorema de Bolzano*, existe algún x_0 tal que $\gamma(\alpha, x_0) = y$.

Finalmente, este x_0 será único ya que $\gamma(\alpha, x)$ es (de nuevo por el ítem b) estrictamente creciente como función de x. Si hubiera dos distintos, x_0 y $\widetilde{x_0}$, sería por ejemplo $x_0 < \widetilde{x}_0$, entonces

$$y = \gamma(\alpha, x_0) < \gamma(\alpha, \widetilde{x_0}) = y$$

lo que es absurdo.
