Álgebra 1

Segundo cuatrimestre 2020

Segundo parcial

Nombre y apellido:	....
Libreta universitaria:	....
Grupo:	G1 G2 G3 G4 G6

1. Sabiendo que el polinomio

$$X^5 + 6\,X^4 + 13\,X^3 + 14\,X^2 + 9\,X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$$

tiene una raíz que es una raíz cúbica de la unidad, encuentre su factorización como producto de polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$.

Solución. Llamemos f al polinomio que aparece en el enunciado. Sabemos que tiene una raíz que pertenece a G_3: como evidentemente no se trata de 1, es alguna de los otros elementos de G_3, y como estos dos son mutuamente conjugados y el polinomio tiene coeficientes reales, que uno de ellos sea raíz de f implica que los dos lo son. Ahora bien, el polinomio $X^2 + X + 1$ tiene por ceros a esos dos elementos de G_3, así que esto nos dice que divide a f. Calculando el cociente, vemos que

$$f = (X^2 + X + 1)(X^3 + 5X^2 + 7X + 2).$$

Consideremos ahora el segundo de los factores que aparecen aquí a la derecha. De acuerdo al Lema de Gauss, sus raíces racionales son elementos del conjunto $\{1, -1, 2, -2\}$: calculando, vemos que 2 no es una de sus raíces pero que -2 sí lo es, y dividiéndolo por $X + 2$ vemos que

$$f = (X^2 + X + 1)(X + 2)(X^2 + 3X + 1). \tag{1}$$

Los tres factores de esta factorización son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$ — el primero y el tercero porque tienen grado 2 y no tienen raíces en $\mathbb{Q}$, y el segundo porque tiene grado 1 — y es entonces la factorización de f como producto de elementos mónicos irreducibles de $\mathbb{Q}[X]$.

El primero de los factores de (1) es irreducible en $\mathbb{R}[X]$, ya que tiene grado 2 y no tiene raíces reales: su discriminante es -3, un número negativo. En cambio, el tercer factor tiene dos raíces reales, $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ y $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, así que

$$f = (X^2 + X + 1)(X + 2)(X - \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5}))(X - \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5})), \tag{2}$$

y esta es la factorización de f como producto de elementos mónicos e irreducible en $\mathbb{R}[X]$.

Finalmente, buscando las raíces del primer factor que aparece en la factorización (2) vemos inmediatamente que

$$f = (X - \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}))(X - \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}))(X + 2)(X - \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5}))(X - \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5})),$$

y esta es la factorización de f como producto de elementos mónicos e irreducible en $\mathbb{C}[X]$. □

2. Encuentre todos los enteros positivos a que satisfacen simultáneamente las siguientes dos condiciones:

$$(143 : 26a^{54321} + 5^{2020}) \neq 1, \qquad 2^{5a+2} \equiv 4 \mod 7.$$

Solución. Sea a un entero positivo y consideremos primero separadamente las condiciones del enunciado.

- Es $143 = 11 \cdot 13$ y los dos factores son primos, así que el máximo común divisor del enunciado es distinto de 1 si y solamente si alguno de 11 o 13 divide a $26a^{54321} + 5^{2020}$. Como 13 es primo y no divide a 5, el Teorema de Fermat nos dice que $5^{12} \equiv 1 \mod 13$ y, por lo tanto, que $26a^{54321} + 5^{2020} \equiv (5^{12})^{168} 5^4 \equiv 1 \mod 13$. Vemos así que 13 no divide a $26a^{54321} + 5^{2020}$ y que

  $$(143 : 26a^{54321} + 5^{2020}) \neq 1 \iff 26a^{54321} + 5^{2020} \equiv 0 \mod 11.$$

  De Teorema de Fermat sabemos que $5^{2020} = (5^{10})^{202} \equiv 1 \mod 11$. Si 11 divide a a, entonces $26a^{54321} + 5^{2020} \equiv 1 \not\equiv 0 \mod 11$. Por otro lado, si 11 no divide a a, entonces el Teorema de Fermat nos dice que

  $$26a^{54321} + 5^{2020} \equiv 4a + 1 \mod 11,$$

  ya que $54321 \equiv 1 \mod 10$. Juntando todo, vemos que

  $$(143 : 26a^{54321} + 5^{2020}) \neq 1 \iff 4a + 1 \equiv 0 \mod 11 \tag{3}$$

- Como 4 es coprimo con 7, es claro que

  $$2^{5a+2} = 2^{5a} 4 \equiv 4 \mod 7 \iff 2^{5a} \equiv 1 \mod 7. \tag{4}$$

  El Teorema de Fermat nos dice que $2^b \equiv 1 \mod 7$ si $b \equiv 0 \mod 6$, y calculando directamente podemos tabular las primeras seis potencias de 2 módulo 7:

b	0	1	2	3	4	5
2^b	1	2	4	1	2	4

  Podemos concluir entonces que si b es un entero no negativo vale que

  $$2^b \equiv 1 \mod 7 \iff b \equiv 0 \mod 3,$$

  y de esto junto con (4) que

  $$2^{5a+2} \equiv 4 \mod 7 \iff 5a \equiv 0 \mod 3. \tag{5}$$

De acuerdo a (3) y (5), los enteros que nos pide encontrar el ejercicio son las soluciones positivas del sistema de congruencias

$$\begin{cases} 4a + 1 \equiv 0 \mod 11 \\ 5a \equiv 0 \mod 3. \end{cases}$$

Como 5 es coprimo con 3, la segunda de estas congruencias es equivalente a $a \equiv 0 \mod 3$, es decir, a que exista $b \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 3b$, y la primera nos dice entonces que $12b + 1 \equiv 0 \mod 11$, de manera que $b \equiv 10 \mod 11$ y, por lo tanto, $b = 11c + 10$ para algún $c \in \mathbb{Z}$. Vemos así que los elementos del conjunto $\{33c + 30 : c \in \mathbb{N}\}$. son precisamente los enteros que buscamos. $\square$

3. Demuestre que si ω es una raíz 14-ava primitiva de la unidad, entonces

$$(1+\omega^8)(\omega+\omega^3+\omega^5)$$

es un número real.

Solución. Llamemos a al número que aparece en el enunciado. Para ver que es un número real es suficiente que probemos que $a-\bar{a}=0$. En ese caso, podemos calcular que

$$\begin{aligned} a-\bar{a} &= (1+\omega^8)(\omega+\omega^3+\omega^5) - \overline{(1+\omega^8)(\omega+\omega^3+\omega^5)} \\ &= \omega+\omega^3+\omega^5+\omega^9+\omega^{11}+\omega^{13}-\bar{\omega}-\bar{\omega}^3-\bar{\omega}^5-\bar{\omega}^9-\bar{\omega}^{11}-\bar{\omega}^{13} \end{aligned}$$

y, como ω es una raíz 14-ava de la unidad, vale $-\bar{\omega}^k = \omega^{7+14-k}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{Z}$, esto es

$$\begin{aligned} &= \omega+\omega^3+\omega^5+\omega^9+\omega^{11}+\omega^{13}+\omega^6+\omega^4+\omega^2+\omega^{12}+\omega^{10}+\omega^8 \\ &= (1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^8+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{13})-1-\omega^7 \end{aligned}$$

que, como $\omega \neq 1$, es

$$= \frac{1-\omega^{14}}{1-\omega} - 1 - \omega^7.$$

Es $\omega^{14}=1$. Por otro lado, como $(\omega^7)^2=\omega^{14}=1$, el número ω^7 es o 1 o -1 y como ω es una raíz 14-ava primitiva, ω^7 no es 1: vemos así que

$$a-\bar{a} = \frac{1-\omega^{14}}{1-\omega} - 1 - \omega^7 = 0 - 1 - (-1) = 0,$$

como queremos. □

Otra solución. El número que aparece en el enunciado es

$$\begin{aligned} (1+\omega^8)(\omega+\omega^3+\omega^5) &= \omega+\omega^3+\omega^5+\omega^9+\omega^{11}+\omega^{13} \\ &= \omega(1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}+\omega^{12})-\omega^7 \\ &= \omega\frac{1-\omega^{14}}{1-\omega^2}-\omega^7, \end{aligned}$$

ya que $\omega^2 \neq 1$ porque ω es primitiva de orden 14, y, por eso mismo, esto es

$$= -\omega^7 = 1,$$

que ciertamente es un número real. □

Otra solución. El número del enunciado es

$$(1+\omega^8)(\omega+\omega^3+\omega^5) = \omega+\omega^3+\omega^5+\omega^9+\omega^{11}+\omega^{13}.$$

Como ω es una raíz primitiva de la unidad de orden 14 y los elementos de $\{1,\ldots,14\}$ que son coprimos con 14 son precisamente los números 1, 3, 5, 9, 11 y 13, vemos que esto es precisamente la suma de las raíces primitivas 14-avas de la unidad. Ahora bien, como los divisores positivos de 14 son 14, 7, 2 y 1, sabemos que tenemos una descomposición de G_{14} como unión disjunta de la forma

$$G_{14} = G_{14}^* \sqcup G_7^* \sqcup G_2^* \sqcup G_1^*,$$

así que

$$\sum_{z \in G_{14}} z = \sum_{z \in G_{14}^*} z + \sum_{z \in G_7^*} z + \sum_{z \in G_2^*} z + \sum_{z \in G_1^*} z. \tag{6}$$

Para cualquier entero n la suma de los elementos de G_n es 0, como sabemos. Si además n es primo, entonces el único elemento de G_n que no es una raíz n-ésima primitiva es 1, así que en ese caso

$$\sum_{z \in G_n^*} = \sum_{z \in G_n} z - 1 = -1.$$

Finalmente, es claro que

$$\sum_{z \in G_1^*} z = 1,$$

así que usando todo esto en (6) vemos que

$$0 = \sum_{z \in G_{14}^*} z - 1 - 1 + 1$$

y, por lo tanto, que el número que aparece en el enunciado es igual a

$$\sum_{z \in G_{14}^*} z = 1$$

y, por supuesto, real. □

Otra solución. El número del enunciado es

$$(1 + \omega^8)(\omega + \omega^3 + \omega^5) = \omega + \omega^3 + \omega^5 + \omega^9 + \omega^{11} + \omega^{13}$$

y, como $\omega^{14} = 1$, esto es

$$\begin{aligned} &= \omega + \omega^3 + \omega^5 + \overline{\omega^5} + \overline{\omega^3} + \overline{\omega} \\ &= (\omega + \overline{\omega}) + (\omega^3 + \overline{\omega^3}) + (\omega^5 + \overline{\omega^5}) \\ &= 2\operatorname{Re}(\omega) + 2\operatorname{Re}(\omega^3) + 2\operatorname{Re}(\omega^5), \end{aligned}$$

que es un número real. □

4. Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el polinomio

$$X^3 - 4X^2 + 2(a+2)X - 3a^2 \in \mathbb{R}[X]$$

tiene dos raíces que suman 2, y para esos valores de a determine la factorización del polinomio como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$.

Solución. Sea f el polinomio que aparece en el enunciado, sean α, β y γ sus raíces —que no son necesariamente distintas, en principio— y supongamos que $\alpha + \beta = 2$. La suma de las raíces de un polinomio de grado 3 es el número opuesto al coeficiente de X^2 en el polinomio: en nuestro caso, entonces, $\alpha + \beta + \gamma = 4$ y nuestra hipótesis nos dice que $\gamma = 2$. En otras palabras, 2 es una raíz de f y, por lo tanto,

$$0 = f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2(a+2)2 - 3a^2 = a(4-3a)$$

Esto nos dice que a es igual a 0 o a 4/3. Dividiendo a f por $X-2$ vemos que si a tiene alguno de esos dos valores, entonces

$$f = (X-2)(X^2 - 2X + 2a).$$

El discriminante del factor cuadrático que aparece aquí es

$$4 - 8a = \begin{cases} 4 & \text{si } a = 0; \\ -20/3 & \text{si } a = 4/3. \end{cases}$$

Ese factor es por lo tanto reducible en $\mathbb{R}[X]$ cuando $a = 0$, con raíces 0 y 2, e irreducible cuando $a = 4/3$. Así, la factorización de f en $\mathbb{R}[X]$ como producto de irreducibles es

$$\begin{cases} (X-2)^2 X & \text{si } a = 0, \\ (X-2)(X^2 - 2X + 8/3) & \text{si } a = 4/3. \end{cases}$$

En $\mathbb{C}[X]$, la factorización es

$$\begin{cases} (X-2)^2 X & \text{si } a = 0, \\ (X-2)(X-(1+i\sqrt{5/3}))(X-(1-i\sqrt{5/3})) & \text{si } a = 4/3. \end{cases}$$

Otra solución. Sea f el polinomio del enunciado, sean α, β y γ las tres raíces del polinomio y supongamos que

$$\alpha + \beta = 2. \tag{7}$$

Como f es mónico, tenemos que

$$\begin{aligned} X^3 - 4X^2 + 2(a+2)X - 3a^2 &= (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \\ &= X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

y, por lo tanto, que

$$4 = \alpha + \beta + \gamma, \qquad 2a + 4 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, \qquad 3a^2 = \alpha\beta\gamma. \tag{8}$$

De la primera de estas igualdades y de (7) vemos que $\gamma = 2$, y la segunda nos dice ahora que

$$2a + 4 = \alpha\beta + (\alpha+\beta)\gamma = \alpha\beta + 4,$$

así que $2a = \alpha\beta$. Usando esto en la tercera igualdad de (8) vemos que $3a^2 = 4a$, es decir, que $a(3a-4) = 0$ y, por lo tanto, que o bien $a = 0$ o bien $a = 4/3$. Analicemos los dos casos por separado.

- Si $a = 0$, entonces $f = X^3 - 4X^2 + 4X$ es claramente igual a

  $$X(X-2)^2,$$

  y esta es su factorización como producto de irreducibles mónicos en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$.

- Si $a = 4/3$, entonces $f = X^3 - 4X^2 + 20/3 \cdot X - 300/3$. Sabemos que 2 es raíz de este polinomio, y dividiendo vemos que

  $$f = (X-2)(X^2 - 2X + 8/3).$$

  El discrimiante del factor cuadrático que aparece aquí es negativo, así que ese factor es irreducible en $\mathbb{R}[X]$ y esa es la factorización como producto de irreducibles monicos allí. Por otro lado, las raices complejas de ese factor cuadrático son los números $1 \pm i\sqrt{5/3}$, así que en $\mathbb{C}[X]$

  $$(X-2)(X-(1+i\sqrt{5/3}))(X-(1-i\sqrt{5/3}))$$

  es la factorización de f como producto de irreducibles mónicos. □

5. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$30a - 98b = 12.$$

Solución. Los tres coeficientes de la ecuación son pares, así que dividiendo todo por 2 obtenemos una ecuación equivalente,

$$15a - 49b = 6.$$

Como $(-13) \cdot 15 + (-4) \cdot (-49) = 1$, los enteros 15 y -49 son coprimos y la última ecuación tiene al par $(a, b) = (-13 \cdot 6, -4 \cdot 6)$ como solución particular. Como la ecuación homogénea

$$15a - 49b = 0$$

tiene por soluciones a los pares $(a, b) = (49c, 15c)$ con $c \in \mathbb{Z}$, la solución general de la ecuación de partida es de la forma

$$a = -13 \cdot 6 + 49c, \qquad b = -4 \cdot 6 + 15c$$

con $c \in \mathbb{Z}$. □

Justifique todas sus respuestas