4

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (Comp.)

PRIMER PARCIAL 16/10/07

TEMA 2

Apellido y nombre: [redacted]

Número de libreta: [redacted]

Número de hojas entregadas: [redacted]

Turno de Trabajos Prácticos (Tache el que no corresponda)

Tarde: Ma-Ju 14 a 17 hs.
~~Noche: Ma-Ju 19 a 22 hs.~~

Por favor:

Resuelva cada ejercicio en hojas separadas.

Numere todas las hojas y coloque en cada una su Nombre y Apellido.

El parcial se aprueba con 60 puntos.

Ejercicio	Puntaje	Nota
1	25	6
2	25	19
3	25	3
4	25	16
Total	100	44

EJERCICIO 1:

La función de distribución conjunta del vector aleatorio $(X;Y)$ que representa la entrada y salida de un algoritmo de cierto proceso, es $f_{XY}(x;y) = 1 \cdot I_P(x;y)$ siendo P el paralelogramo de vértices (0;1) ; (0;2); (1;1) y (1;0).

a) Hallar $f_Y(y)$.

b) Calcular $E(5X - Y)$.

c) Calcular $P(Y > \frac{1}{2} / X = \frac{3}{4})$.

d) Decidir si X e Y son variables aleatorias independientes. Justificar.

EJERCICIO 2:

La resistencia de ciertos engranajes de acero a la tensión es una variable aleatoria con densidad

$$f_X(x) = 5\,\lambda^5\, x^4\, e^{-(\lambda x)^5}\, I_{(0,+\infty)}(x)$$

Se pide:

a) Hallar la función de distribución acumulada de X.

b) Hallar la mediana de la distribución.

c) Hallar la distribución de la variable $Y = X^5$ e indicar a qué familia de distribuciones pertenece.

d) Hallar la esperanza y la varianza de la variable $W = 3Y + \frac{1}{2}$.

EJERCICIO 3:

Se tienen *(N+1)* urnas numeradas *0,1,..., N*. La urna *i* contiene *i* bolitas blancas y *(N-i)* bolitas negras.

a) Se elige al azar una urna y de ella se extrae una bolita al azar. Calcular la probabilidad de que la bolita extraída sea negra.

b) Se elige una urna al azar y de ella se extraen *2* bolitas al azar con reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean negras?

c) Calcular la probabilidad de haber elegido la urna con el número 4, dado que las dos bolitas extraídas fueron negras.

Fórmulas útiles: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EJERCICIO 4:

Un fabricante produce dos artículos: A y B. Por cada 2 artículos de tipo A se producen 5 de tipo B. Se supone que la duración (en meses) de un artículo A es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[8;14]$, y que la duración de un artículo B (en meses) es una variable con distribución exponencial, con media 11 meses.

a) Si un artículo de tipo B duró en funcionamiento 10 meses, o más ¿cuál es la probabilidad de que no falle antes de 1 año?

b) Se selecciona al azar un artículo de la producción total; hallar la probabilidad de que dure más de 1 año en funcionamiento.

c) Indicar cuál es la distribución de la variable Y: número de artículos seleccionados de la producción total, en forma independiente, hasta obtener cuatro artículos cuya duración supere un año. Calcular la probabilidad de tener que seleccionar seis artículos hasta encontrar cuatro cuya duración supere un año.

d) Sea X la duración en meses de un artículo de tipo B. El rendimiento de los artículos de tipo B se puede expresar en función de su duración a través de la expresión $R = 2X^2 - 2$. Hallar $E(R)$ y $Var(R)$.

Ayuda: Usar función generadora de momentos.

④ 1

$\boxed{16/10/07}$

2. $f_X(x) = 5\lambda^5 x^4 e^{-(\lambda x)^5} I_{(0,+\infty)}(x)$

a) $\cdot\ t > 0$

$$F_X(t) = \int_0^t 5\lambda^5 x^4 e^{-(\lambda x)^5}\,dx$$

$$u = (\lambda x)^5$$

$$du = 5\lambda^5 x^4\,dx$$

$$= \int_0^{(\lambda t)^5} e^{-u}\,du = \Big[-e^{-u}\Big]_0^{(\lambda t)^5} = 1 - e^{-(\lambda t)^5}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-(\lambda t)^5} & t > 0 \end{cases}$$

b) $F_X(x_{0.5}) = \frac{1}{2}$

$$1 - e^{-\lambda^5 x_{0.5}^5} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-\lambda^5 x_{0.5}^5} = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{-}\lambda^5 x_{0.5}^5 = \cancel{-}\ln 2$$

$$\sqrt[5]{\frac{\ln 2}{\lambda^5}} = x_{0.5}$$

c) $Y = X^5$

$$F_Y(y) = P(X^5 \leq y) = F_X(\sqrt[5]{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{5\, y^{\frac{4}{5}}} f_X(\sqrt[5]{y})$$

$$f_X(\sqrt[5]{y}) = 5\lambda^5 y^{\frac{4}{5}} e^{-\lambda^5 y} \iff \sqrt[5]{y} > 0$$

$$y > 0$$

$$f_Y(y) = \frac{\cancel{5}\lambda^5 \cancel{y^{\frac{4}{5}}}}{\cancel{5}\cancel{y^{\frac{4}{5}}}} e^{-\lambda^5 y} \, I_{(0,+\infty)}(y)$$

$$Y \sim \mathcal{E}(\lambda^5)$$

d) $E\left(3Y + \frac{1}{2}\right) = 3E(Y) + \frac{1}{2}$

$$= 3\,\frac{1}{\lambda^5} + \frac{1}{2}$$

$$V\left(3Y + \frac{1}{2}\right) = 9\,V(Y) = \frac{9}{\lambda^{10}}$$

4 2

3. N+1 urnas num $0, \ldots, N-1$

Urna i contiene $\begin{cases} i \text{ bolitas blancas} \\ N-i \text{ '' negras} \end{cases}$

U_i: Se elige la urna i, $0 \leq i \leq N$

1n: Se extrae una bolita negra

2n: '' extraen dos bolitas negras

$$P(1n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PROB TOTAL}}}{=} \sum_{i=0}^{N} P(1n|U_i)P(U_i) = \sum_{i=0}^{N} \frac{(N-i)}{N} * \frac{1}{N+1}$$

$$= \frac{1}{\cancel{N(N+1)}} \left[\cancel{N(N+1)} - \frac{\cancel{N(N+1)}}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

X = # bolitas negras en las 2 extr c/repo

$$X|U_i \sim Bi\left(2, \frac{N-i}{N}\right)$$

$$P(2n) = \sum_{i=0}^{N} P(2n|U_i)\,P(U_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \left[\binom{2}{2} \left(\frac{N-i}{N}\right)^2 \left(1-\frac{N-i}{N}\right)^0 \frac{1}{N+1} \right]$$

$$= \frac{1}{N^2(N+1)} \left(\sum_{i=0}^{N} N^2 - 2Ni + i^2 \right)$$

$$= \frac{1}{N^3\cancel{(N+1)}} \left(N^2\cancel{(N+1)} - \cancel{2}\cancel{N}\frac{N\cancel{(N+1)}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{N}\cancel{(N+1)}(2N+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{N}\,\frac{2N+1}{6}$$

④ 3

4\. X_A : duración en meses de un artículo A

X_B : " " " " " " B

$X_A \sim \mathcal{U}[8,14]$ $X_B \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{11}\right)$

A : Se elige un art A

$P(A) = \frac{2}{7}$

a) $P(X_B > 11 \mid X_B > 9) \underset{\uparrow}{=} P(X_B > 2)$

FALTA DE MEMORIA $X_B \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{11}\right)$

$= e^{-\frac{2}{11}}$

b) X_T : duración en meses de un art

$P(X_T > 12) = P(X_T > 12 \mid A)P(A) + P(X_T > 12 \mid A^c)P(A^c)$

$= P(X_A > 12) * \frac{2}{7} + P(X_B > 12) * \frac{5}{7}$

$= \left(\int_{12}^{14} \frac{1}{6}\, dx\right) \frac{2}{7} + \frac{5}{7} e^{-\frac{12}{11}}$

$= \frac{1}{3}\frac{2}{7} + \frac{5}{7}e^{-\frac{12}{11}} = 0.3352$

c) $Y \sim BN(4, 0.3352)$

$P(Y=6) = \binom{5}{3}(0.3352)^4(0.6648)^2$

$= 0.055795$