Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer parcial (13/05/2023) - 1er. cuatrimestre 2023

TEMA 1

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	B	B	B	10

MARTÍN

Apellido: SABETAY Nro. de libreta: 476/16 Nro de práctica: 2

Nombre: KEVIN Carrera: CS. DE DATOS

ATENCIÓN: Recuerde que para aprobar el examen debe tener dos ejercicios bien.

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + 4z^2 = 1 \qquad y \qquad z = \frac{1}{3}y + 1.$$

(a) Dar **una** parametrización de la curva $\mathcal{C}$.

(b) Hallar los puntos de $\mathcal{C}$ cuya recta tangente tenga dirección perpendicular al vector $(0,3,1)$.

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,-1)} \frac{(x+2)(y+1)^2\operatorname{sen}(x+2)}{(x+2)^4+(y+1)^4}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^3\ln(2x)}{2(x-1)^2+2y^2}$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|(x^2+y^2)}{|x|^3+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Probar que existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que el plano tangente a su gráfico en $(1,2,f(1,2))$ es

$$2x + y + 3z = 6.$$

Para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(s,t) = f\left(\operatorname{sen}(s) + 2e^{st} - 1 + t, e^{-s} + \cos t\right),$$

calcular el plano tangente al gráfico de g en $(0,0,g(0,0))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

① KEVIN SABETAY

① ⓐ Reescribo las ecuaciones para poder parametrizar.

$x^2 + 4z^2 = 1$

$x^2 + \left(\frac{z}{1/2}\right)^2 = 1 \rightarrow x = \text{sen}(t)$

$\rightarrow z = \frac{1}{2}\cos(t)$

$z = \frac{1}{3}y + 1$

$z - 1 = \frac{1}{3}y$

$3z - 3 = y \longrightarrow y = \frac{3}{2}\cos(t) - 3$

✓

$$\boxed{r(t) = \left(\text{sen}(t), \frac{3}{2}\cos(t) - 3, \frac{1}{2}\cos(t)\right) \quad t \in [0, 2\pi)}$$

ⓑ $(0,3,1) \perp (a,b,c) \iff (0,3,1)(a,b,c) = 0$

Voy a obtener dos direcciones perpendiculares porque el vector se encuentra en $\mathbb{R}^3$

NO, En $\mathbb{R}^3$, los vectores perpendiculares a $(0,3,1)$ (o cualquier otro vector) forman un plano.

Papel de fibra de caña de azúcar.

$(0,3,1)(a,b,c)=0$

$3b+c=0 \qquad \boxed{c=-3b}$

ESTE ES EL P
a y y SON
rios. Todos Los
PUNTOS de es
forma son un
plano

$(a,b,-3b) = a(1,0,0) + b(0,1,-3)$

Entonces el vector director de la recta tangente tendrá que ser en dirección

$(1,0,0)$ o $(0,1,-3)$

$\Gamma'(t) = \left(\cos(t), -\frac{3}{2}\operatorname{sen}(t), -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)\right)$ ✓

Si uso $\boxed{t=0}$ ✓ logro que me quede un vector director que cumpla $\perp (0,3,1)$

$\Gamma'(0) = \left(\cos(0), -\frac{3}{2}\operatorname{sen}(0), -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(0)\right) = (1,0,0)$

también lo logro usando $\boxed{t=\pi}$ ✓

<u>En general</u>: siempre que se CUMPLA.

$\left(\cos(t), -\frac{3}{2}\operatorname{sen}(t), -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)\right)(0,3,1) = 0$

$-\frac{9}{2}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) = 0$ ✓

$\boxed{\operatorname{sen}(t) = 0}$

② KEVIN SABETAY

② ⓐ $\lim_{(x,y)\to(-2,-1)} \frac{(x+2)(y+1)^2 \operatorname{sen}(x+2)}{(x+2)^4+(y+1)^4} = \frac{0}{0}$

Voy a probar que el límite no existe yendo por dos rectas diferentes y obteniendo diferentes valores

pruebo con $\boxed{x=-2}$

$$\lim_{y\to -1} \frac{(-2+2)(y+1)^2 \operatorname{sen}(-2+2)}{(-2+2)^4+(y+1)^4} =$$

$$= \lim_{y\to -1} \frac{0}{(y+1)^4} = 0$$

pruebo con $x+2=y+1$

$\boxed{x+1=y}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x+1+1)^2 \operatorname{sen}(x+2)}{(x+2)^4+(x+1+1)^4} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^3 \operatorname{sen}(x+2)}{2(x+2)^4} =$$

Papel de fibra de caña de azúcar.

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\operatorname{sen}(x+2)}{2(x+2)} \overset{L'h}{=} \frac{0}{0}$$

Puedo usar L'hopital porque es una indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\overset{L'h}{=} \lim_{x \to -2} \frac{\cos(x+2)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

probé con la curva $x = -2$ y me dio que el límite daba 0.

Probé con la curva $x + 1 = y$ y me dio que el límite daba $\frac{1}{2}$

Puedo concluir que el límite no existe.

(b)

$$F(x,y) = \frac{(x-1)^3 \ln(2x)}{2(x-1)^2 + 2y^2}$$

Como el numerador se va a 0 mas rapido que el denominador ya me imagino que el límite va a existir.

Veamos nuestro candidato con la curva $\boxed{x = 1}$

$$\lim_{y \to 0} \frac{(1-1)^3 \ln(2 \cdot 1)}{2(1-1)^2 + 2y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{2y^2} = 0$$

Vamos a demostrar por Sandwich que el límite es 0

$$0 \leq \left| \frac{(x-1)^3 \ln(2x)}{2(x-1)^2 + 2y^2} - 0 \right| =$$

$$= \frac{|x-1|^3 \, |\ln(2x)|}{2(x-1)^2 + 2y^2} = \frac{|x-1| \, (x-1)^2 \, |\ln(2x)|}{2\left((x-1)^2 + y^2\right)} \leq$$

Voy a acotar usando que $\frac{a}{a+b} \leq 1$ si $a > 0$ y $b > 0$

~~si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ ...~~

En este caso $a = (x-1)^2$ y $b = y^2$

$$\leq \frac{\underbrace{|x-1|}_{\to 0} \, \underbrace{|\ln(2x)|}_{\to \ln(2)}}{2} = g(x,y)$$

$$\xrightarrow{(x,y) \to (1,0)} 0$$

$$0 \leq F(x,y) \leq g(x,y)$$

$$\underset{(x,y)\to(1,0)}{\downarrow} \quad \underset{(x,y)\to(1,0)}{\downarrow} \quad \underset{(x,y)\to(1,0)}{\downarrow}$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Por lo tanto el limite existe y

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} F(x,y) = 0 \quad \checkmark$$

③ ④

③ ⓐ $V=(a,b)$, $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial F}{\partial V}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(ah+0,\,bh+0)-F(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{ah\,|bh|\,(a^2h^2+b^2h^2)}{|ah|^3+b^6h^6}-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a\cancel{h}\,|b|\,|h|\,h^2\,\overbrace{(a^2+b^2)}^{=1}}{(|a|^3|h|^3+b^6h^6)\,\cancel{h}}=$$

Me fijo por derecha y por izquierda así me deshago del módulo

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{a\,|b|\,h\,h^2}{|a|^3h^3+b^6h^6}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h^3}\,a\,|b|}{\cancel{h^3}(|a|^3+b^6h^3)}=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{a\,|b|}{|a|^3+b^6h^3}=\boxed{\frac{a\,|b|}{|a|^3}}$$ ✓

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{a\,|b|\,(-h)\,h^2}{|a|^3\,(-h)^3 + b^6 h^6} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{h^3}\; a\,|b|}{\cancel{h^3}\left(-|a|^3 + b^6 h^3\right)} = \frac{\cancel{-}\, a\,|b|}{\cancel{-}\,|a|^3}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) = \frac{a\,|b|}{|a|^3}} \quad ✓$$

Solo me falta ver que pasa con $\boxed{a=0}$ ✓

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(0,bh) - F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0\,|bh|\,\left(0^2 + (bh)^2\right)}{h\cdot\left(|0|^3 + (bh)^6\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{b^6 h^6} = 0 \quad ✓$$

(habría que ver también $(0,-1)$, pero es igual)

b) Para ver si es diferenciable me armo el plano tangente a F en $(0,0)$

$F_y(0,0) = 0$ (calculado en el item anterior con $a=0$)

$F_x(0,0) = \dfrac{1 \cdot |0|}{|1|^3} = 0$ (Estoy usando $a=1$ y $b=0$)

④ ⑤ KEVIN SABETAY

0 0 0

$$\Pi_{F_{tg}} : \quad z = \overbrace{F(0,0)}^{} + \overbrace{F_x(0,0)}^{} \cdot x + \overbrace{F_y(0,0)}^{} \cdot y$$

$$\boxed{z = 0}$$

En realidad, es el candidato a plano tangente. Como no es diferenciable, no es

Veamos si cumple la condición para ser diferenciable. F diferenciable en (0,0) $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) - \Pi_{F_{tg}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|\,(x^2+y^2)}{(|x|^3+y^6)\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

Veamos que sucede con la curva $\boxed{x = y}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,|x|\,(2x^2)}{(|x|^3+x^6)\sqrt{2x^2}}$$

si ~~[illegible]~~ nos acercamos por derecha.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{4}}{x^3(1+x^3)\sqrt{2}\,x} = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 0$$

No es diferenciable.

(B) (6) KEVIN SABORAY

④ Primero voy a reescribir el plano tangente de F en (1,2) para obtener

$\nabla F(1,2)$ y $F(1,2)$

$2x + y + 3z = 6$

$3z = 6 - 2x - y$

$z = 2 - \frac{2}{3}(x - 1 + 1) - \frac{1}{3}(y - 2 + 2)$

$z = 2 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(y-2) - \frac{2}{3}$

$z = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{3}(y-2)$

$$\boxed{\begin{aligned} F(1,2) &= \frac{2}{3} \\ \nabla F(1,2) &= \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}}$$

✓ Está bien lo que hiciste, pero recordá que el plano y F tienen las mismas derivadas en (1,2). Derivar es más fácil!

Defino $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$h(s,t) = \left(\operatorname{sen}(s) + 2e^{st} - 1 + t,\ e^{-s} + \cos(t)\right)$

$g(s,t) = F(h(s,t))$

$D_g(s,t) = D_F(h(s,t)) \cdot D_h(s,t)$ ✓

$$D_g(0,0) = \underbrace{D_F(h(0,0))}_{①} \; \underbrace{D_h(0,0)}_{②}$$

① $h(0,0) = (\text{sen}(0) + 2e^0 - 1 + 0, \; e^0 + \cos(0))$

$$\boxed{h(0,0) = (1,2)}$$

$$\boxed{D_F(h(0,0)) = D_F(1,2) = \overbrace{\nabla F(1,2)}^{\text{YA LO CALCULÉ ANTES}} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$$ ✓

② $$D_h(s,t) = \begin{pmatrix} \cos(s) + 2te^{st} & 2se^{st} + 1 \\ -e^{-s} & -\text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D_h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$ ✓

$$D_g(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{D_g(0,0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}$$ ✓

(6) (7) KEVIN CABEZAS

Ya tenemos todo para armar el plano tangente de g en $(0,0)$

$$\Pi_{g_{tg}} : z = g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial s}(0,0)\, s + \frac{\partial g}{\partial t}\, t$$

¿Por qué g es diferenciable?

~~$\Pi_{g_{tg}} : z = \frac{2}{3}$~~

$$g(0,0) = F(h(0,0))$$

$$g(0,0) = F(1,2)$$

$$\boxed{g(0,0) = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\Pi_{g_{tg}} : z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\, s - \frac{2}{3}\, t}$$

Papel de fibra de caña de azúcar.