1	2	3	4	Calificación
	B	M B-	B	6 (SEIS)

Apellido y Nombre: [redacted] No. de libreta: [redacted]

Carrera: COMPUTACIÓN

Álgebra I

Examen final - 27/07/2022

1. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(7.3^n - 5^{n+1} : 3^{n+1} + 7.5^n)$$

es igual a 2 o 4.

2. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que verifican simultáneamente:

- $16a + 22b = 162$,
- $a - 2b$ tiene exactamente 5 divisores positivos.

3. En G_{12} se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$w \,\mathcal{R}\, z \quad \text{si y sólo si} \quad wz \in G_6.$$

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) Hallar el cardinal de la clase de equivalencia del número complejo i.

4. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado mínimo entre los polinomios **mónicos** que satisfacen simultáneamente que:

- $(X^2 + 2X + 5) \mid (f : f')$,
- $(X^2 - 4X + 1) \mid (f : f'')$,
- $f'(2 - \sqrt{3}) = 0$.

Hallar la facorización de f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

(4) $F \in \mathbb{Q}(x)$ mónico de grado mínimo

si $(x^2+2x+5) \mid (F : F')$, quiere decir que x^2+2x+5 divide a F y F', y que, por lo tanto, sus raíces son raíces dobles de F

Hallo raíces de x^2+2x+5: $\dfrac{-2 \pm w}{2}$, $w^2 = 4 - 4 \cdot 5$
$w = 4i$

$\dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$ son raíces dobles de F

$F = (x-(-1+2i))^2 (x-(-1-2i))^2 \cdot$ "algo más"

sé que $(x^2-4x+1) \mid (F : F'')$, hallo raíces

$\dfrac{4 \pm w}{2}$, $w^2 = 16-4$, $\dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$
$w = 2\sqrt{3}$

$2+\sqrt{3}$ y $2-\sqrt{3}$ son raíces al menos simples de F

como $F'(2-\sqrt{3}) = 0$,

$2-\sqrt{3}$ es raíz de F', lo que implica que $2+\sqrt{3}$ también lo es pues $F \in \mathbb{Q}(x)$

$\therefore$ $2 \pm \sqrt{3}$ son raíces triples de F, pues también son raíces de F''

$F = (x-(-1+2i))^2 (x-(-1-2i))^2 (x-(2+\sqrt{3}))^3 (x-(2-\sqrt{3}))^3$

Hallo su factorización:

En $\mathbb{C}[x]$: $F = (x-(-1+2i))^2 (x-(-1-2i))^2 (x-(2+\sqrt{3}))^3 (x-(2-\sqrt{3}))^3$

pues está formado por factores de grado 1 irreducibles en $\mathbb{C}(x)$ pues tienen raíces complejas.

En $\mathbb{R}[x]$: $F = (x^2+2x+5)^2 (x-(2+\sqrt{3}))^3 (x-(2-\sqrt{3}))^3$

pues está formado por $(x-(2+\sqrt{3}))^3$ y $(x-(2-\sqrt{3}))^3$ que son de grado 1 e irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ pues tiene raíces reales, y por $(x^2+2x+5)^2$ cuyas raíces son imaginarias y que por lo tanto queda irreducible en $\mathbb{R}(x)$

En $\mathbb{Q}[x]$: $F = (x^2+2x+5)^2 (x^2-4x+1)^3$ pues está formado por factores de grado 2 cuyas raíces son irracionales o imaginarias y que por lo tanto queda irreducible en $\mathbb{Q}(x)$

② $a, b \in \mathbb{Z}$

$16a + 22b = 162$, $(16:22) = 2$, $\wedge$ $2 \mid 162$ ✓

$\frac{16a}{2} + \frac{22b}{2} = \frac{162}{2}$ $\iff$ $8a + 11b = 81$

a ojo veo que una solución es $(a, b) = (17, -5)$

Todas las soluciones de este sistema son de la forma:

$(a, b) = (-11k + 17, 8k - 5)$, con $k \in \mathbb{Z}$

Debe cumplir que, sea $c = a - 2b$, c tenga 5 divisores positivos.

$a - 2b = (-11k + 17) - 2(8k - 5) =$

$= -11k + 17 - 16k + 10 =$

$= -27k + 27 = c$

$27 = 3^3$, $\#Div^{\oplus}(27) = 4$

$Div^{\oplus}(27) = \{1, 3, 9, 27\}$

Veo qué k cumple esto:

si $k = 0$, $c = 27$ tendrá 4 divisores positivos.

si $k = 1$, $c = 0$, que no tiene 5 divisores positivos

El k debe cumplir que c sea igual a 3^4 pues si $c = 3^3 \cdot n^i$, siendo n cualquier otro número, la cantidad de divisores de c será $4 \cdot (i+1)$, que no puede ser 5

Entonces, como c debe ser múltiplo de 3 (por su forma $-27k + 27$), c debe ser igual a $\pm(3^4) = 81$ o -81, pues $\# Div^{\oplus}(81) = 5$

$Div^{\oplus}(\pm 81) = \{1, 3, 9, 27, 81\}$

$-27k + 27 = 81 \iff k = \frac{81 - 27}{-27} = -2$

$-27k + 27 = -81 \iff k = \frac{-81 - 27}{-27} = 4$

Por lo tanto todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que cumplen estas dos condiciones son de la forma:

$(a, b) = (-11k + 17, 8k - 5)$, $k \in \{-2, 4\}$ $\Rightarrow Div^{\oplus}(a - 2b) = 5$

$\Rightarrow (a, b) = \{(39, -21), (-27, 27)\}$

③ a) • Reflexividad:

$$\omega R \omega \iff \omega\omega \in G^6 \iff (\omega\omega)^6 = 1$$

$$(\omega\omega)^6 = (\omega^2)^6 = \omega^6\omega^6 = 1 \cdot 1 = 1 \ \checkmark$$

$\therefore$ $\omega R \omega$, es Reflexiva

¿que raro?

• Simetría:

$$\omega R z \Rightarrow z R \omega$$

$$\omega R z \iff \omega z \in G^6 \iff (\omega z)^6 = 1 \iff \omega^6 z^6 = 1 \cdot 1 = 1 \ \checkmark$$

$$z R \omega \iff z\omega \in G^6 \iff (z\omega)^6 = 1 \iff z^6 \omega^6 = 1 \cdot 1 = 1 \ \checkmark$$

$\therefore$ es simétrica

• Transitividad:

$$\omega R z \wedge z R y \Rightarrow \omega R y$$

$$\omega R z \iff (\omega z)^6 = 1 \iff \omega^6 z^6 = 1 \ \checkmark$$

$$z R y \iff (zy)^6 = 1 \iff z^6 y^6 = 1 \iff y^6 = 1$$

$$\omega R y \iff (\omega y)^6 = 1 \iff \omega^6 y^6 = 1 \iff 1 \cdot 1 = 1 \ \checkmark$$

$\therefore$ es Transitiva

¿?

¿?

b) $\omega R i \iff (i\omega) \in G6 \iff i^6 \omega^6 = 1$

$-\omega^6 = 1$, $\# \overline{\omega R i} = 6$