//

1	2	3	4	Calificación
21	25	12	25	83

A

TEMA 1

Probabilidad y Estadística (C)

Primer parcial - 19/05/2022

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. ***Realizar cada ejercicio en hoja separada.*** *Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.*

APELLIDO Y NOMBRE . Nº DE LIBRET ......

mail:................ ... . FIRMA: ... .

Turno: | Tarde: 14 a 17 hs | Noche: 19 a 22 hs | | Nº de hojas entregadas (sin enunciado): |

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos y tener un ejercicio bien resuelto.

Recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. Resolver usando al menos 4 decimales. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

---

1. (25 puntos) En cierta ciudad el 4% de los conductores beben alcohol antes de conducir. Por otro lado, si una persona bebió alcohol la probabilidad de chocar su auto es 0,57; en cambio si no lo hizo la probabilidad de no chocar es 0,92.

   (a) (8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor no haya bebido alcohol si se sabe que chocó?

   (b) (3 puntos) Analizar y justificar si los eventos "Bebió alcohol" y "Chocó su auto" son independientes.

   (c) En una avenida de la ciudad se dispone de un control de alcoholemia. En el mismo se frena un auto y se controla si el conductor bebió alcohol. Asumiendo que el control en cada auto es un evento independiente:

      (i) (7 puntos) Si se controlan 20 autos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos conductores hayan bebido alcohol?

      (ii) (7 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un conductor que bebió alcohol hasta el octavo control?

2. (25 puntos) La demanda diaria (medida en m^3) de pintura que recibe una fábrica está dada por una variable aleatoria continua X con función de distribución acumulada dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2x} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}.$$

   La fábrica de pintura posee tres máquinas y las utiliza cada día de la siguiente manera: si la demanda (en m^3) está entre 1 y 1,5, se enciende una sola máquina. Si la demanda está entre 1,5 y 2,5 se encienden dos máquinas, y si está entre 2,5 y 3 se encienden las tres máquinas.

   (a) (12 puntos) Hallar la función de probabilidad puntual de la variable aleatoria $Y =$ cantidad de máquinas encendidas.

(b) (5 puntos) Hallar la función de densidad $f_X(x)$.

(c) (8 puntos) Calcular la $Var(Z)$ siendo $Z = E(Y)X + Var(Y)$.

3. (25 puntos) El tiempo total (en horas) que permanece un cliente en el restaurante "Tati" se divide en dos variables aleatorias:

   $Y_1 =$ tiempo de espera hasta que recibe el primer plato;

   $Y_2 =$ tiempo de espera entre que recibe el primer plato y sale del restaurante (es decir, tiempo de comer y pagar).

   La densidad conjunta del vector (Y_1, Y_2) está dada por:

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-(y_1+y_2)} & y_1, y_2 \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

   (a) (13 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente pase más de una hora en el restaurante.

   (b) (7 puntos) Hallar las distribuciones marginales de Y_1 e Y_2. ¿Son Y_1 e Y_2 independientes? Justificar.

   (c) (5 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente tarde en recibir su primer plato más de una hora.

4. (25 puntos) Mauricio y sus amigos juegan paddle los viernes a la tarde. A veces alquilan una cancha por 45 minutos, otras por 60 minutos y otras por 90 minutos. La probabilidad de que alquilen la cancha una hora o más es 0,63 y de que alquilen la cancha una hora o menos es 0,71.

   (a) (15 puntos) Dar la función de probabilidad puntual de la variable aleatoria $T =$ "tiempo en minutos de alquiler de la cancha de paddle" y verificar que $E(T) = 63.15$ y $\text{Var}(T) = 334.3275$.

   (b) (10 puntos) Si alquilan 44 veces en forma independiente la cancha de paddle, aproximar la probabilidad de que la duración promedio de alquiler esté entre 59 y 72 minutos.

tema 1

Julieta Pagés turno tarde (12 a 17)

① Evento A= Un conductor bebió alcohol ✓ $\to P(A)=0{,}04$

$\to P(\neg A)=1-0{,}04=0{,}96$

Evento B = una ~~persona~~ conductor chocó su auto ✓

• $P(B\mid A)=0{,}57$ • $P(B\mid\neg A)=0{,}08$ $\underbrace{= 1-P(\neg B\mid\neg A) = 1-0{,}92}_{\text{Para Justificar de dónde saco el } 0{,}08}$

• $P(\neg B\mid\neg A)=0{,}92$

a) $P(\neg A\mid B)=\dfrac{P(\neg A\wedge B)}{P(B)}=\dfrac{P(\neg A)\,P(B\mid\neg A)}{P(B)}$

explicarlo aquí

$P(B)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Teo. de}\\ \text{Prob. Total}}}{=}P(B\mid\neg A)\,P(\neg A)+P(B\mid A)\,P(A)=0{,}08\cdot 0{,}96+0{,}57\cdot 0{,}04$

$P(B)=0{,}0996$ ✓

$\Rightarrow P(\neg A\mid B)=\dfrac{P(\neg A)\,P(B\mid\neg A)}{P(B)}=\dfrac{0{,}96\cdot 0{,}08}{0{,}0996}=\boxed{0{,}7711}$ ✓

b) $P(A\wedge B)=P(B\mid A)\,P(A)=0{,}57\cdot 0{,}04=0{,}0228$ ✓

$P(B)=0{,}0996$ $P(A)=0{,}04$ $P(B)\cdot P(A)=0{,}003984$ ✓

A y B son independientes si se cumple que:

$P(A\wedge B)=P(A)\,P(B)$ ✓

sin embargo

$P(A\wedge B)=0{,}0228\neq 0{,}003984=P(A)\cdot P(B)$

Por lo tanto No son independientes. ✓

c)

i) X = cantidad de conductores que bebieron alcohol de 20 (variable aleatoria)

d? [Y= un conductor $\underbrace{\text{tomó alcohol}}_{\text{EXITO}}$, $Y\sim Be(0{,}0996)$]

Como puedo ver a X como una suma de 20 "Y" Bernoulli, independientes entre sí, puedo afirmar que:

$X\sim Bi(20,\ 0{,}0996)$ 0,04

~~$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P_X(0)-P_X(1)=1-\binom{20}{0}$~~ (Sigue atrás)

NOTA

por discreta

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (p_X(0) + p_X(1)) = 1 - p_X(0) - p_X(1)$

$= 1 - \binom{20}{0}(0{,}0996)^0(1-0{,}0996)^{20} - \binom{20}{1}(0{,}0996)^1(1-0{,}0996)^{19}$

$= 0{,}606$

no

ii)

W = cantidad de intentos hasta encontrar el primer conductor que $\underbrace{\text{bebió alcohol}}_{1 \text{ éxito}}$

↑ variable aleatoria

$W \sim G(0{,}0996)$ $\boxed{0.04}$

$P(W \leq 8) = \sum_{i=1}^{8} \underbrace{(0{,}0996)(1-0{,}0996)^{i-1}}_{p_W(i)} \simeq \boxed{0{,}5679999}$

↓ calculadora

0.2786

de

Tema 1

Julieta Pagés turno Tarde (12 a 17)

(2)

X = demanda diaria de Pintura (m^3) que recibe una fábrica
↑
Variable aleatoria

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2x} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a)

Y = cantidad de máquinas encendidas $R_y = \{1, 2, 3\}$
↑
v.a.

$p_y(1) = P(1 < X < 1{,}5) = F_x(1{,}5) - F_x(1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2.1{,}5} - (0) = \frac{1}{2}$

$p_y(2) = P(1{,}5 < X < 2{,}5) = F_x(2{,}5) - F_x(1{,}5) = \frac{9}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

$p_y(3) = P(2{,}5 < X < 3) = F_x(3) - F_x(2{,}5) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

Es decir que esa es la Función de Probabilidad puntual

Y	1	2	3	
p(y)	1/2	2/5	1/10	1

→ suman 1 como deberían

b) $f_x(x) = F_x'(x) = \begin{cases} (0)' & \text{si } x < 1 \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2x}\right)' & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ (1)' & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{2x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$$\boxed{f_x(x) = \frac{3}{2x^2} \, I_{(1,3)}(x)}$$

c) $\cancel{V(Z) = V(E(Y))}$ $E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{5}$

$\cancel{V(X)}$ $E(Y^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{2}{5} + 3^2 \cdot \frac{1}{10} = 3$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 3 - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{11}{25}$

$$Z = E(Y)X + V(Y) = \frac{8}{5}X + \frac{11}{25}$$

Pilar

$$V(Z) = V\left(\frac{8}{5}X + \frac{11}{25}\right) = \left(\frac{8}{5}\right)^2 V(X) = \frac{64}{25}\left(3 - \frac{9}{4}\ln^2(3)\right) \simeq \boxed{0{,}72797}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) = \int_1^3 \cancel{x} \frac{3}{2x^{\cancel{2}}}\,dx = \int_1^3 \frac{3}{2x} = \left(\frac{3}{2}\ln(x)\right)\Big|_1^3 = \frac{3}{2}\ln(3)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) = \int_1^3 \cancel{x^2} \frac{3}{2\cancel{x^2}}\,dx = \int_1^3 \frac{3}{2}\,dx = \left(\frac{3x}{2}\right)\Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - \frac{9}{4}\ln^2(3)$$

Escaneado con CamScanner

0/7/5

tema 1

Julieta Pagés Turno tarde (12 a 17)

(3) v.a → Y_1 = Tiempo (en horas) de espera hasta que recibe el 1° plato

v.a → Y_2 = tiempo de espera ~~hasta~~ entre que recibe el 1° plato y sale del restaurante (comer y pagar)

(en horas)

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)=\begin{cases} e^{-(y_1+y_2)} & y_1,y_2\geq 0 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

a) $T=Y_1+Y_2$ T = Tiempo total en el restaurante

$$P(T>1)=1-P(T\leq 1)=1-P(y_1+y_2\leq 1)=1-F_{Y_1+Y_2}(1)$$ ✓

$$\left[F_{Y_1+Y_2}(K)=\int_0^K f_{(Y_1,Y_2)}(y_1=u,\ y_2=K-u)\,du=\int_0^K e^{-(u+K-u)}\,du=\int_0^K e^{-K}\,du\right.$$

$$\left.=Ke^{-K}=F_{Y_1+Y_2}(K)\right]$$ la cuenta está bien, pero esta es la densidad de Y_1+Y_2. Falta integrar

$$\boxed{P(T>1)=1-e^{-1}}$$

b) $$f_{Y_1}(y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2=\int_0^{+\infty} e^{-(y_1+y_2)}\,dy_2=\left(-e^{-(y_1+y_2)}\right)\Big|_{y_2=0}^{y_2=+\infty}$$

$$f_{Y_1}(y_1)=\begin{cases} -e^{-y_1} & y_1\geq 0 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$ ✓

$$f_{Y_2}(y_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_1=\int_0^{+\infty} e^{-(y_1+y_2)}\,dy_1=\left(-e^{-(y_1+y_2)}\right)\Big|_{y_1=0}^{y_1=+\infty}$$

$$f_{Y_2}(y_2)=\begin{cases} -e^{-y_2} & y_2\geq 0 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$ ✓

(Sigue atrás)

imes e

Y_1 e Y_2 son independientes si se cumple que:

$$F_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = F_{Y_1}(y_1)\, F_{Y_2}(y_2)$$

y resulta que:

$$F_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = e^{-(y_1+y_2)}\, I_{(0,+\infty)}(y_1)\, I_{(0,+\infty)}(y_2) = e^{-y_1}\, I_{(0,+\infty)}(y_1) \cdot e^{-y_2}\, I_{(0,+\infty)}(y_2) = f_{Y_1}(y_1)\, f_{Y_2}(y_2)$$

Por lo tanto <u>sí</u>, son independientes Y_1 e Y_2 ✓

c) $P(Y_1 > 1) = 1 - P(Y_1 \leq 1) = 1 - F_{Y_1}(1) = 1 - \int_0^1 f_{Y_1}(y_1)\, dy_1 = 1 - \int_0^1 e^{-y_1}\, dy_1$

$= 1 - (-e^{-1} + \underbrace{e^{0}}_{=1}) = \boxed{e^{-1}}$ ✓

Tema 1

Julieta Page's turno tarde (12 a 17)

4) T = Tiempo en minutos de alquiler de la cancha de paddle

$R_T = \{45, 60, 90\}$

a) $P(T \geq 60) = p_T(60) + p_T(90) = 0,63 \rightarrow p_T(90) = 0,63 - p_T(60)$ ①

$P(T \leq 60) = p_T(45) + p_T(60) = 0,71 \rightarrow p_T(45) = 0,71 - p_T(60)$ ②

y como son probabilidades de una func. de prob. tot. $p_T(45) + p_T(60) + p_T(90) = 1$ ③

observación: también se podía usar que $P(T \geq 60) = 1 - P(T < 60)$
$0,63 = 1 - p_T(45)$

reemplazando ① y ② en ③

$0,71 - \cancel{p_T(60)} + \cancel{p_T(60)} + 0,63 - p_T(60) = 1$

$\boxed{0,34 = p_T(60)}$ ④

de reeemplazar ④ en ①

$\boxed{p_T(90) = 0,63 - 0,34 = 0,29}$

de reemplazar ④ en ②

$\boxed{p_T(45) = 0,71 - 0,34 = 0,37}$

t	45	60	90	
$p_T(t)$	0,37	0,34	0,29	1

→ suman 1 como deberían

$E(T) = 45 \cdot 0,37 + 60 \cdot 0,34 + 90 \cdot 0,29 = 63,15$ ✓

$E(T^2) = 45^2 \cdot 0,37 + 60^2 \cdot 0,34 + 90^2 \cdot 0,29 = 4322,25$

$V(T) = E(T^2) - E(T) = 4322,25 - (63,15)^2 = 334,3275$ ✓

b) ~~P(59~~ $\bar{T} = \dfrac{\sum_{i=1}^{44} T_i}{n}$ } es el promedio

Faltaría explicar un poco por qué podés aplicar TCL.

$P(59 < \bar{T} < 72) = P\left(\dfrac{59 - 63,15}{\sqrt{\frac{334,3275}{44}}} < \dfrac{\bar{T} - \overset{63,15}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}_{\to \frac{334,3275}{44}}} < \dfrac{72 - 63,15}{\sqrt{\frac{334,3275}{44}}}\right)$

$\overset{TCL}{\simeq} \Phi(3,21) - \Phi(-1,51) = \Phi(3,21) - 1 + \Phi(1,51) = 0,9338$ ✓

NOTA

Escaneado con CamScanner