	1	2	3	4	5	Calificación
Tema 1	B	B	B	B	B	A

APELLIDO Y NOMBRE: YULITA FEDERICO NO. DE LIBRETA: 351/17

TURNO (DE PRÁCTICA): ☑ Mañana ☐ Tarde ☐ Noche CARRERA: LIC. EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Álgebra I

Primer Cuatrimestre - Primer parcial - 17/05/2019

1. Sea $\mathbf{X} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq 2019\}$. Definimos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ como

$$\mathbf{A}\mathcal{R}\mathbf{B} \text{ si y solo si } \#(\mathbf{A}\triangle\mathbf{B}) \leq 2.$$

   a) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.
   b) Para $\mathbf{A} = \{28, 33, 34, 37, 42, 45, 107, 160, 166\}$, hallar la cantidad de $\mathbf{B} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ tales que $\mathbf{A}\mathcal{R}\mathbf{B}$.

2. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ la sucesión definida por:

$$a_0 = 4, \qquad a_{n+1} = 6\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) + 3n^2 - 4n - 3.$$

Probar que $a_n = 3 \cdot 7^n - n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, \ldots, 30\} \to \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$ existen que cumplan simultáneamente:
   - f es **inyectiva**
   - $\forall x \leqslant 15 \ \ f(x) \leqslant 20$
   - $f(16) \leqslant 30$.

4. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $81 \mid 64^n + 18n - 1$.

5. Determinar los posibles valores de $d = (a^2 - 2a - 5 : a - 1)$ para cada $a \in \mathbb{Z}$. Exhibir un valor de a correspondiente a cada uno de los valores de d hallados.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

FEDERICO YULITA, 351/17

1) (A) <u>Reflexividad:</u> $A \Delta A = \emptyset \Rightarrow |A\Delta A| = |\emptyset| = 0$

$0 \leq 2 \Rightarrow \mathcal{R}$ es reflexiva. ✓

<u>Simetría:</u> $A \Delta B = B \Delta A \Rightarrow |A\Delta B| \leq 2 \Leftrightarrow |B \Delta A| \leq 2$

$\Rightarrow A\mathcal{R}B \Leftrightarrow B\mathcal{R}A \Rightarrow \mathcal{R}$ es simétrica. ✓

<u>Antisimetría:</u> Ej.: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ $\Rightarrow$ $A\Delta B = \{3\}$, $|\{3\}| \leq 2 \Rightarrow A\mathcal{R}B$; $B\Delta A = \{3\}$, $B\mathcal{R}A$

pero, $A \neq B$. No se cumple $A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}A \Rightarrow A = B$.

$\Rightarrow \mathcal{R}$ no es antisimétrica. X

<u>Transitividad:</u> qvq: $\neg((A\mathcal{R}B) \wedge (B\mathcal{R}C) \Rightarrow A\mathcal{R}C)$

Ej.: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\Rightarrow$ $A\Delta B = \{1, 2\} \Rightarrow |A\Delta B| \leq 2 \Rightarrow A\mathcal{R}B$

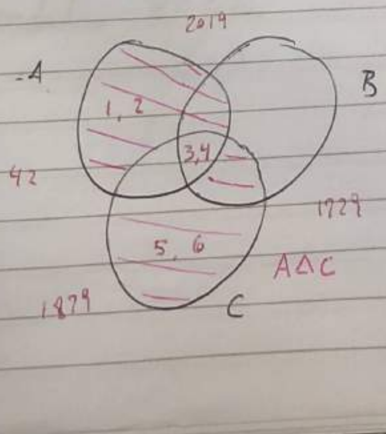
$B = \{3, 4\}$

$C = \{3, 4, 5, 6\}$ $\Rightarrow$ $B\Delta C = \{5, 6\} \Rightarrow |B\Delta C| \leq 2 \Rightarrow B\mathcal{R}C$

$\Rightarrow (A\mathcal{R}B) \wedge (B\mathcal{R}C)$ se cumple, pero notemos que $A\mathcal{R}C$ no:

$A\Delta C = \{1, 2, 5, 6\} \Rightarrow |A\Delta C| = 4 \nleq 2 \Rightarrow A \not\mathcal{R} C$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ no es transitiva. X



Representación gráfica de la no-transitividad

(3) $|A| = 9 \Rightarrow |B| \geq 7$. Para que ARB entonces como mínimo B debe contener 7 elementos de A, tal que $|A \Delta B| \leq 2$. A su vez, A y B pueden tener hasta 2 elementos que el otro no contiene para que se siga cumpliendo que ARB. Hay 6 casos distintos:

1. B contiene 7 elementos de A.
2. B contiene 8 elementos de A.
3. B contiene 8 elementos de A y uno fuera de A.
4. B contiene 9 elementos de A.
5. B contiene 9 elementos de A y uno fuera de A
6. B contiene 9 elementos de A y dos fuera de A.

La cantidad de conjuntos B que cumplen la premisa es:

$$\underbrace{\binom{9}{7}}_{①} + \underbrace{\binom{9}{8}}_{②} + \underbrace{\binom{9}{8} \times \binom{2019-9}{1}}_{③} + \underbrace{\binom{9}{9}}_{④} + \underbrace{\binom{9}{9}\binom{2019-9}{1}}_{⑤} + \underbrace{\binom{9}{9}\binom{2019-9}{2}}_{⑥}$$

? 2009

$$= 9 \times 4 + 9 + 9 \times 2010 + 1 + 1 \times 2010 + 1 \times \frac{2010 \times 2011}{2}$$

$$= \boxed{9 \times 2015 + 2011 \times 1006} = 2041201$$

FEDERICO YULITA, 351/17

2) $a_{n+1} = 6\sum_{j=0}^{n} a_j + 3n^2 - 4n - 3 \quad , \quad a_0 = 4$

$P_n: \; a_n = 3\times 7^n - n + 1 \; , \quad n \in \mathbb{N}_0$ Veamos si se cumple P_n $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$\underline{P_0}: \; a_0 = 3\times 7^0 - 0 + 1 = 3 + 1 = 4$ ✓

Hipótesis: P_n es verdadero.

$\underline{P_{n+1}}: \; a_{n+1} = 6\sum_{j=0}^{n} a_j + 3n^2 - 4n - 3 = 6\sum_{j=0}^{n}\left(3\times 7^j - j + 1\right) + 3n^2 - 4n - 3$

$= 18\sum_{j=0}^{n} 7^j - 6\sum_{j=0}^{n} j + 6\sum_{j=0}^{n} 1 + 3n^2 - 4n - 3$

$= 18\left(\frac{1-7^{n+1}}{1-7}\right) - 6\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 6(n+1) + 3n^2 - 4n - 3$

$= 3\times 7^{n+1} - \cancel{3} - \cancel{3n^2} - 3n + 6n + \cancel{6} + \cancel{3n^2} - 4n - \cancel{3}$

$= 3\times 7^{n+1} - (3+4-6)n = 3\times 7^{n+1} - n = \underline{3\times 7^{n+1} - (n+1) + 1}$

$\Rightarrow P_{n+1}$ es verdadero ✓

$\Rightarrow$ Por inducción P_n es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

FEDERICO YULITA, 551/17

3) Tomo: $D = \{n\in\mathbb{N} / n\leq 30\}$, $C = \{n\in\mathbb{N} / n\leq 40\}$

$\Rightarrow f: D\to C$

Si quiero que f sea inyectiva entonces existen $\frac{|C|!}{(|C|-|D|)!} = \frac{40!}{10!}$ funciones que lo logran.

Quiero lograr también que a los primeros 15 elementos de D les correspondan algunos de los primeros 20 elementos de C. También, quiero que al elemento $16\in D$ le corresponda alguno de los primeros 30 elementos de C. Esto lo voy a lograr tomando elementos de C para asignarlos elementos de D y para que se cumpla la inyectividad voy a tomar elementos sin reposición. Además, voy a tener en consideración que los elementos son distinguidos.

- Primero, tomo 15 elementos de los primeros 20 de C para asignarlos a los primeros 15 de D. Hay $\binom{20}{15}$ formas de hacerlo. Como el orden me importa debo multiplicar por $15!$ y entonces tengo $\binom{20}{15}15!$ formas de cumplir la segunda condición manteniendo inyectividad.

- Luego, para asignarle un valor a $16\in D$ considero los elementos menores a 30 que me quedan en C. Como ya tomé 15 me quedan solo $30-15=15$ opciones.

- Finalmente, asigno los valores de D que quedan a los de C que queden y de forma inyectiva. Hay $\frac{(40-16)!}{((40-16)-(30-16))!}$ formas de hacerlo.

Entonces, la cantidad de funciones $f: D\to C$ que cumplen estas condiciones es:

$$\binom{20}{15}\times 15!\times 15\times\binom{24}{10}\times 14! = \boxed{\frac{20!\times 15\times 24!}{5!\times 10!}}$$

FEDERICO YULITA, 351/17

4) $81 \mid 64^n + 18n - 1 \iff 64^n + 18n - 1 \equiv 0 \pmod{81}$.

Tomo: $P_n: \; 64^n + 18n - 1 \equiv 0 \pmod{81}$, $n \in \mathbb{N}$.

$P_1: \; 64^1 + 18 \times 1 - 1 = 81 \equiv 0 \pmod{81}$ ✓

Hipótesis: P_n es verdadero.

P_{n+1}:

$$64^n + 18n - 1 \equiv 0 \pmod{81}$$
$$\iff 64^n \equiv -18n + 1 \pmod{81}$$
$$\iff 64^{n+1} \equiv -1152n + 64 \pmod{81}$$
$$\iff 64^{n+1} + 18n - 17 \equiv -1134n + 81 \pmod{81}$$
$$\iff 64^{n+1} + 18(n+1) - 1 \equiv -1134n \pmod{81}$$

$1134 \mid \underline{81}$
$324 \quad 14$
(0)

$\iff 64^{n+1} + 18(n+1) - 1 \equiv 0 \pmod{81}$

$\Rightarrow P_{n+1}$ es verdadero

$\Rightarrow$ Por inducción demostramos que P_n es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

FEDERICO YULITA . 351/17

5) $d = (a^2 - 2a - 5 : a - 1) \Rightarrow d \mid a^2 - 2a - 5 \wedge d \mid a - 1$

$\Rightarrow d \mid a^2 - 2a - 5 - (a-1)^2 \Rightarrow d \mid -6 \Rightarrow d \in \{1, 2, 3, 6\}$

a	$a^2 - 2a - 5$	$a-1$	d
0	-5	-1	1
1	-6	0	6
2	-5	3	1
3	-2	2	2
4	3	3	3
5	10	4	2
6	19	5	1
7	30	6	6
8	43	7	1

Solo hasta 5 es necesario $5 = 6 - 1$. Hasta ahí llegan los restos de 6.

$$\Rightarrow \boxed{d = \begin{cases} 1 \ , & (a \equiv 0 \pmod 6) \veebar (a \equiv 2 \pmod 6) \\ 2 \ , & (a \equiv 3 \pmod 6) \veebar (a \equiv 5 \pmod 6) \\ 3 \ , & a \equiv 4 \pmod 6 \\ 6 \ , & a \equiv 1 \pmod 6 \end{cases}}$$