**Algebra I**

**Examen Final (10/12/2021)**

1. Sea $V = \{1, 2, \dots, 499, 500\}$. Se define en $\mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$ la relación $\mathcal{R}$:

$$A \mathcal{R} B \iff \min(A) = \min(B) \text{ y } \max(A) = \max(B),$$

(donde si $X$ es un subconjunto no vacío de $V$, $\min(X)$ denota el menor elemento de $X$ y $\max(X)$ denota el mayor elemento de $X$. Por ejemplo para $X = \{2, 5, 8\}$, $\min(X) = 2$ y $\max(X) = 8$ mientras que para $X = \{5\}$, $\min(X) = \max(X) = 5$).

   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$ y calcular el cardinal de las clases de $X = \{1, 100\}$ y de $Y = \{50\}$.

   (b) ¿Cuántas clases de equivalencia tiene la relación $\mathcal{R}$?

---

2. Determinar los posibles restos al dividir por 252 de todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que

$$(a^{225} + 10a + 1 : 252) = 14.$$

---

3. (a) Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1.$$

   (b) Calcular el resto de dividir a $X^{6n} + X^{3n} + 1$ por $X^2 + X + 1$.

---

4. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $f$ de multiplicidad exactamente 5. Definimos la sucesión de polinomios $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$f_1 := f \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - \alpha)^2 f_n + f^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Encontrar y probar una fórmula para la multiplicidad exacta de $\alpha$ como raíz de $f_n$.

(Enunciar cuidadosamente todas las propiedades vistas en la teórica utilizadas.)

---

$\boxed{\text{JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS}}$

| ① | Álgebra I<br>Final 10/12/2021 | |
|---|---|---|

Ejercicio 1

$V = \{1, 2, \dots, 499, 500\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$ como: $A \mathcal{R} B \iff \min(A) = \min(B)$ y $\max(A) = \max(B)$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia

$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia $\iff$ ~~[illegible]~~ $\mathcal{R}$ es reflexiva $\wedge$ $\mathcal{R}$ es simétrica $\wedge$ $\mathcal{R}$ es transitiva

- $\boxed{R}$: $\mathcal{R}$ es reflexiva $\iff$ Dado $A \in \mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$, $A \mathcal{R} A$

Por definición, $A \mathcal{R} A \iff \min(A) = \min(A)$ y $\max(A) = \max(A)$

Luego $\mathcal{R}$ es reflexiva dado que $\min(A) = \min(A)$ y $\max(A) = \max(A)$, $\forall A \in \mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$

- $\boxed{S}$: $\mathcal{R}$ es simétrica $\iff$ Dados $A, B \in \mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$, $A \mathcal{R} B \Rightarrow B \mathcal{R} A$

Por definición, $A \mathcal{R} B \iff \min(A) = \min(B)$ y $\max(A) = \max(B)$

Por lo tanto, sabiendo que $A \mathcal{R} B$, se sabe que
$\min(A) = \min(B) \iff \min(B) = \min(A)$
$\max(A) = \max(B) \iff$ ~~[illegible]~~ $\iff \max(B) = \max(A)$

Y por lo tanto $\max(B) = \max(A)$ y $\min(B) = \min(A) \iff B \mathcal{R} A$ como se quería probar.
Luego $\mathcal{R}$ es una relación simétrica

Hope

NOW William Hope

• $\boxed{T}$: R es transitivo $\Leftrightarrow$ Dados $A, B, C \in P(V)\setminus\emptyset$,
$ARB \wedge BRC \Rightarrow ARC$

Por definición, $ARB \Leftrightarrow min(A) = min(B)$ y $max(A) = max(B)$
$BRC \Leftrightarrow min(B) = min(C)$ y $max(B) = max(C)$

Dado que $min(A) = min(B)$ y $min(B) = min(C)$
$\Rightarrow min(A) = min(C)$

Y también dado que $max(A) = max(B)$ y $max(B) = max(C)$
$\Rightarrow max(A) = max(C)$

Luego $min(A) = min(C) \wedge max(A) = max(C) \Leftrightarrow ARC$, como se quería probar, luego R es una relación transitiva.

$\therefore$ Por lo tanto R es una relación de equivalencia dado que es una relación reflexiva, simétrica y transitiva ✓

a') Calcular el cardinal de la clase de $X = \{1, 100\}$

Busco todos los $B \in P(V)\setminus\emptyset$ tales que $XRB$
por definición, $XRB \Leftrightarrow min(X) = min(B)$ y $max(X) = max(B)$
$\Leftrightarrow 1 = min(B)$ y $100 = max(B)$

Por ende busco todos los $B \in P(V)\setminus\emptyset$ tales que $min(B) = 1$ y $max(B) = 100$

Sabiendo que $V = \{1, 2, ..., 499, 500\}$ tengo que contar todos los subconjuntos de V que poseen al 1, ~~poseo~~, poseen al 100 y no poseen ningún $a \in V / a > 100$

Así, $1 \rightarrow 1$ posibilidad $\rightarrow 1$    101 al 500 $\rightarrow$ 1 posibilidad
2 al 99 $\rightarrow$ 2 posibilidades $\rightarrow 2^{98}$
$100 \rightarrow 1$ posibilidad $\rightarrow 1$

②

Por lo tanto tendré $1.2^{98}.1.1 = 2^{98}$ conjuntos $\in \overline{X}$

$\therefore \Rightarrow \# \overline{X} = 2^{98}$ ✓

a'') Calcular el cardinal de la clase de $Y = \{50\}$

Busco todos los $C \in P(V) \setminus \emptyset$ tales que $Y R C$

por definición, $Y R C \Leftrightarrow$ ~~...~~ $\min(Y) = \min(C)$ y $\max(Y) = \max(C)$

$\Leftrightarrow 50 = \min(C)$ y $50 = \max(C)$

Por ende, busco todos los $C \in P(V) \setminus \emptyset$ tales que $\min(C) = 50$ y $\max(C) = 50$

Pero el único conjunto que cumple ambos en simultáneo es $C = \{50\}$ y por lo tanto

$\# \{50\} = 1$ ✓

b) ¿Cuántas clases de equivalencia tiene la relación R?

Para saber si un subconjunto de V pertenece a una clase de equivalencia, alcanza con observar el mínimo y el máximo del subconjunto.

Separo en dos casos, clases del $\{n\}$ con $n \in V$ forman 500 clases distintas y no se relacionan con subconjuntos de dos o más elementos.

Clase del tipo $\{a_1, \dots, a_r\}$ con $2 \leq r \leq 500$, $a_i \in V$

En este caso voy a tener ~~...~~ $500 - a_1$ clases

Ej $a_1 = 1 \Rightarrow \{1, 500\}, \{1, 499\}, \{1, 498\} \dots \Rightarrow$ ~~...~~ 499 clases

$a_1 = 2 \Rightarrow \{2, 500\}, \{2, 499\}, \dots \Rightarrow 498$ clases

$a_1 = 499 \Rightarrow \{499, 500\} \Rightarrow 1$ clase

Scanned with CamScanner

Luego, habrá $500 + \sum_{i=1}^{499} i = 500 + \frac{(499) \cdot 500}{2} = 125250$ clases

③

Ejercicio 2

$(a^{225}+10a+1 : 252) = 14$ Busco $r_{252}(a)$

Se que $252 = 2^2 . 3^2 . 7$ y $14 = 2.7$

Dado que $(a^{225}+10a+1 : 252) = 14 \Rightarrow 2 \mid a^{225}+10a+1$
$4 \nmid a^{225}+10a+1$
$7 \mid a^{225}+10a+1$
$3 \nmid a^{225}+10a+1$ ✓

• Luego $2 \mid a^{225}+10a+1 \Leftrightarrow a \equiv 1(2)$
pues si $a \equiv 0(2) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 0+0+1 \not\equiv 0(2)$
$a \equiv 1(2) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 1+0+1 \equiv 0(2)$ ✓

$a \equiv 1(2) \Leftrightarrow a \equiv 1(4)$ o $a \equiv 3(4)$ ✓

Si $a \equiv 1(4) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 1+10+1 \equiv 0(4)$ NO SIRVE
Si $a \equiv 3(4) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 3^{225}+10.3+1 \equiv (3^2)^{112}.3+2+1$
$\equiv 1^{112}.3+3 \equiv 6 \equiv 2(4)$
$\Rightarrow a \equiv 3(4)$ sirve. ✓

• $7 \mid a^{225}+10a+1 \Leftrightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 0(7)$
Separo en dos casos: $7 \mid a$ y $7 \nmid a$

• $7 \mid a \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 0+0+1 \not\equiv 0(7) \Rightarrow a \equiv 0(7)$ No sirve
• $7 \nmid a \Rightarrow a^{225}+10a+1 \underset{PTF}{\equiv} (a^6)^{37}.a^3+10a+1 \equiv a^3+3a+1$

PTF: $a, p \in \mathbb{Z}$, $p$ primo, $a \perp p$ : $a^{p-1} \equiv 1(p)$

Luego busco $a \mid a^3+3a+1 \equiv 0(7)$

Tabla de restos mod 7

| $a\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | mod 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^3\equiv$ | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 | |
| $3a\equiv$ | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 | |
| $a^3+3a+1\equiv$ | 1 | 5 | ~~8~~1 | 2 | 0 | 1 | 4 | |

Por tabla veo que $a^3+3a+1\equiv 0\ (7) \Leftrightarrow a\equiv 4\ (7)$ ✓

• Busco congruencia de a módulo ~~9~~ 3

$3\nmid a^{225}+10a+1 \Leftrightarrow a^{225}+10a+1 \not\equiv 0\ (3)$

Separo en dos casos: $3|a$ y $3\nmid a$

• $3|a \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 0+0+1 \not\equiv 0\ (3)$ luego $a\equiv 0\ (3)$

• $3\nmid a \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv (a^2)^{112}\cdot a + a+1 \equiv 2a+1\ (3)$ sirve
PTF

• Si $a\equiv 1\ (3) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 2a+1 \equiv 0\ (3)$ $a\equiv 1\ (3)$ NO sirve

• Si $a\equiv 2\ (3) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 2a+1 \equiv 5\ (3)$ $a\equiv 2\ (3)$ sirve

Luego $a\equiv 2\ (3)$, $a\equiv 0\ (3)$ sirven

$a\equiv 2\ (3) \Rightarrow a\equiv 2\ (9)$ ó $a\equiv 5\ (9)$ ó $a\equiv 8\ (9)$ ✓

$a\equiv 0\ (3) \Rightarrow a\equiv 0\ (9)$ ✗

NO $a\equiv 0\ (3) \Rightarrow a\equiv 0$ ó $3$ ó $6\ (9)$

INUTIL

Pruebo cuales cumplen $9\nmid a^{225}+10a+1$

Si $3\nmid N$, ent $9\nmid N$

• $a\equiv 0\ (9) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 1\ (9)$ ✓

• $a\equiv 2\ (9) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 2^{225}+20+1 \equiv (2^3)^{75}+3 \equiv (-1)^{75}+3 \equiv 2\ (9)$ ✓

• $a\equiv 5\ (9) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 5^{225}+50+1 \equiv (5^3)^{75}+51 \equiv (-1)^{75}+6 \equiv 5\ (9)$ ✓

• $a\equiv 8\ (9) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 8^{225}+80+1 \equiv (8^3)^{75}+81 \equiv (-1)^{75}+0 \equiv 8\ (9)$ ✓

Hope

NOW William Hope

4

Faltan $a \equiv 6(9)$ y $a \equiv 3(9)$

Por lo tanto $(a^{225}+10a+1 : 252) = 14 \Leftrightarrow a \equiv 3(4)$
$a \equiv 4(7)$
$a \equiv 0(9)$ ó $a \equiv 2(9)$
ó $a \equiv 5(9)$ ó $a \equiv 8(9)$

No? $a \equiv 0(3) \Rightarrow a \equiv 0$ ó $3$ ó $6(9)$
$a \equiv 2(3) \Rightarrow a \equiv 2$ ó $5$ ó $8(9)$

- $a \equiv 0(9) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3(4) \\ a \equiv 4(7) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ Por Teorema chino del resto existe una única solución módulo 252 $X = X_0 + X_1 + X_2$

$S_0$ $a \equiv 3(4)$ $\Rightarrow 63k \equiv 3(4) \Leftrightarrow -k \equiv 3(4) \Leftrightarrow k \equiv 1(4)$
$a \equiv 0(63) \Rightarrow a = 63k$ $\Rightarrow k_0 = 1$ es solución particular

Luego $X_0 = 63 . 1 = 63$

$S_1$ $a \equiv 4(7)$ $\Rightarrow 36k \equiv 4(7) \Leftrightarrow k \equiv 4(7)$
$a \equiv 0(36) \Rightarrow a = 36k$ $k_1 = 4$ es solución particular

Luego $X_1 = 36 . 4 = 144$

$S_2$ $a \equiv 0(9)$ $\Rightarrow a \equiv 0(252)$
$a \equiv 0(28)$

$X_2 = 0$

Luego $a \equiv 0(9) \Rightarrow r_{252}(a) = 63 + 144 = 207$

- $a \equiv 2(9) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3(4) \\ a \equiv 4(7) \\ a \equiv 2(9) \end{cases}$

Dado que $a \equiv 3(4)$ y $a \equiv 4(7)$ no cambiaron en relación al inciso anterior, $X_0 = 63$ y $X_1 = 144$

Hope
SERVICIOS DE SALUD

NOW
William Hope

$S_2$ $a \equiv 2(9)$ $\Rightarrow 28k \equiv 2(9) \Leftrightarrow k \equiv 2(9)$

$a \equiv 0(28) \Rightarrow a = 28k$ $\quad k_2 = 2$ es solución particular

$\Rightarrow X_2 = 28.2 = 56$

Luego $X = X_0 + X_1 + X_2 = 63 + 144 + 56 = 263 \equiv 11 (252)$

• $a \equiv 5(9)$

$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3(4) \\ a \equiv 4(7) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$ $X = 63 + 144 + X_2$ con $X_2$ solución particular de $S_2$

$S_2$ $a \equiv 5(9)$ $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $28k \equiv 5(9) \Leftrightarrow k \equiv 5(9)$

$a \equiv 0(28) \Rightarrow a = 28k$ $\quad k = 5$

$X_2 = 28.k = 28.5 = 140$

$\Rightarrow X = 63 + 144 + 140 = 347 \equiv 95(252)$

• $a \equiv 8(9) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3(4) \\ a \equiv 4(7) \\ a \equiv 8(9) \end{cases}$ $X = 63 + 144 + X_2$ con $X_2$ solución del sistema $S_2$

$S_2$ $\begin{cases} a \equiv 8(9) \\ a \equiv 0(28 \Rightarrow a = 28k \end{cases}$ $\Rightarrow 28k \equiv 8(9) \Leftrightarrow k \equiv 8(9)$ $\quad k = 8$ es solución

$\Rightarrow X_2 = 28.8 = 224$

Por lo tanto los posibles restos de dividir a $a \in \mathbb{Z}$ por 252 son 207, 11, 95 y 224

$\boxtimes$

Hiciste algo superfluo y conceptualmente mal: Reg

$9|N \Rightarrow 3|N$ por lo tanto $3 \nmid N \Rightarrow 9 \nmid N$, ~~[illegible]~~ $a \equiv 0(3) \not\Rightarrow a \equiv 0(9)$

Hope
NOW William Hope

(5)

Ejercicio 3

a) Defino $f = X^2+X+1$ y $g = X^{2n}+X^n+1$

Se que $f = \left(X-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\cdot\left(X-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$ con

$w_1 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $w_2 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ raíces cúbicas de la unidad

Por propiedades de las raíces de la unidad, se que sea $w \in G_n \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)}$

y se que sea $w \in G_3$, $w^1+w^2+1=0$ solo si $w \neq 1$

Por lo tanto $f \mid g \Leftrightarrow g(w_1)=0 \Leftrightarrow g(w_2)=0$

~~Para $g(w_1)=0 \Leftrightarrow n \equiv 1(3)$~~

Si $n \equiv 0(3) \Rightarrow g(w_1) = w_1^0 + w_1^0 + 1 \neq 0$

Si $n \equiv 1(3) \Rightarrow g(w_1) = w_1^2 + w + 1 = 0$ ✓

Si $n \equiv 2(3) \Rightarrow g(w_1) = w_1^1 + w^2 + 1 = 0$ ✓

Luego $f \mid g \Leftrightarrow n \equiv 1(3)$ ó $n \equiv 2(3)$ B⁻

b) Por teorema del resto (NO ?) se que $h = X^{6n}+X^{3n}+1 = f \cdot q + r$

$\Leftrightarrow h(w_1) = f(w_1)\cdot q + r(w_1)$

$h(w_1) = r(w_1) = w_1^{6n} + X^{3n} + 1$

No ? r tiene grado 1 no queda determinado por $h(w_1)$ sino por $h(w_1)$ y $h(w_2)$

• $n \equiv 0(3) \Rightarrow w_1^0 + w_1^0 + 1 = 3$

~~$n \equiv 1(3) \Rightarrow \ldots$~~

• $n \equiv 1(3) \Rightarrow w_1^6 + w_1^3 + 1 = 3$

• $n \equiv 2(3) \Rightarrow w_1^{12} + w_1^9 + 1 = 3$

$r(w_1) = 3$ pero falta $r(w_2)$ ?

Reg

$\therefore$ Luego, el resto de dividir a $X^{6n}+3^n+1$ por $X^2+X+1$ es igual a 3

6

Ejercicio 4

$f_1 = f \quad f_{n+1} = (X-\alpha)^2 f_n + f^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz con $\text{mult}(\alpha, f) = 5 \Leftrightarrow f = (X-\alpha)^5 \cdot q$ con $q(\alpha) \neq 0$

$n=1 \Rightarrow \text{mult}(\alpha, f_1) = 5$

$n=2 \Rightarrow \text{mult}(\alpha, f_2) = 7 \qquad (X-\alpha)^2 \cdot (X-\alpha)^5 \cdot q + [(X-\alpha)^5 \cdot q]^2$

$n=3 \Rightarrow \text{mult}(\alpha, f_3) = 9 \qquad (X-\alpha)^2 \cdot (X-\alpha)^7 \cdot q_2 + (X-\alpha)^{15} q^3$

$n=4 \Rightarrow \text{mult}(\alpha, f_4) = 11 \qquad (X-\alpha)^2 \cdot (X-\alpha)^9 q_3 + (X-\alpha)^{20} \cdot q$

$n=5 \Rightarrow \text{mult}(\alpha, f_5) = 13 \qquad (X-\alpha)^2 \cdot (X-\alpha)^{11} \cdot q_4 + (X-\alpha)^{25} \cdot q$

$n \cdot 2 + 1$? $\rightarrow n = 2 \Rightarrow m_n = 5$

$\qquad 3 \Rightarrow m_n = 7$

$(n+1) \cdot 2 + 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow m_1 = 5$

$\qquad n = 2 \quad m_2 = 7$

Parece que la multiplicidad de $\alpha$ como raíz de $f_n$ es de la forma $(n+1) \cdot 2 + 1 = 2n+3$

Sin embargo para poder asumir que estas multiplicidades son correctas hay que verificar que $2n+3 \leq 5n$

Dado que, dados $h$ y $g$ polinomios con $\text{mult}(\beta, h) = 3$ y $\text{mult}(\alpha, g) = 5 \Rightarrow \text{mult}(\alpha, f \cdot g) = 8$

pero $\text{mult}(\alpha, f+g) = 3$

y en el caso general, la multiplicidad de una raíz en una suma de polinomios es la de menor grado. Solo si tienen $\neq$ mult

pues $h = (X-\alpha)^3 \cdot \beta_1$ con $\beta_1(\alpha) \neq 0$ y $g = (X-\alpha)^5 \cdot \beta_2$ con $\beta_2 \neq 0$

y por lo tanto $h+g = (X-\alpha)^3 \cdot \beta_1 + (X-\alpha)^5 \cdot \beta_2 = (X-\alpha)^3 (\beta_1 + (X-\alpha)^2 \beta_2)$

donde $(X-\alpha) \nmid \beta_1 + (X-\alpha)^2 \beta_2$

Scanned with CamScanner

Pruebo por inducción que $5.n > 2n+3$, $\forall n \geq 2$

Caso base $n=2 \Rightarrow$

$5.2 > 2.2+3 \Leftrightarrow 10 > 7$

Luego $p(2)$ es verdadero

Paso inductivo

Dado $h \geq 2$, $p(h)\ V \Rightarrow p(h+1)\ V$

HI $p(h)\ V \Leftrightarrow 5.h > 2.h+3$

Qpq $p(h+1)\ V \Leftrightarrow 5.(h+1) > 2(h+1)+3$

$\Leftrightarrow 5h+5 > 2h+5$

$\Leftrightarrow 5h > 2h$ que es verdadero, $\forall h \geq 2$

Luego $5n > 2n+3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (No hacía falta usar inducción para probar esto) pues $5n > 2n+3$

$\Leftrightarrow 5n - 2n > 3$

$3n > 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Luego resta probar que $mult(\alpha, f_n) = 2n+3$

Por inducción: $p(n) =:$ "$mult(\alpha, f_n) = 2n+3$", $\forall n \in \mathbb{N}$

Caso base $n=1 \Rightarrow p(1): mult(\alpha, f_1) = 5$ es verdadero

Paso inductivo: Dado $h \geq 1$, $p(h)\ V \Rightarrow p(h+1)\ V$?

HI: $p(h)\ V \Leftrightarrow mult(\alpha, f_h) = 2h+3 \Rightarrow f_h = (x-\alpha)^{2h+3} \cdot q_2$ con $q_2(\alpha) \neq 0$

Qpq: $p(h+1)\ V \Leftrightarrow mult(\alpha, f_{h+1}) = 2(h+1)+3$

$$f_{h+1} = (x-\alpha)^2 f_h + f^{h+1} = (x-\alpha)^2 . f_h + [(x-\alpha)^5 . q]^{h+1}$$

$$= (x-\alpha)^2 . f_h + (x-\alpha)^{5(h+1)} q_1^{h+1}$$

$$\underset{HI}{=} (x-\alpha)^2 . (x-\alpha)^{2h+3} \cdot q_2 + (x-\alpha)^{5(h+1)} q_1$$

$$\underset{h \geq 2}{=} (x-\alpha)^{2h+5} \left(q_2 + (x-\alpha)^{5h+5-2h-5} q_1\right)$$

Hope

NOW William Hope

⑦

$p_{h+1} = (x-\alpha)^{2h+5}\left( q_2 + (x-\alpha)^{3h} \cdot q_1 \right)$

luego, $mult(\alpha, p_{h+1}) = 2h+5$ pues $q_2(\alpha) \neq 0$ como se quería probar

Por lo tanto $p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V, $\forall h \geq 1$

luego $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

y así $mult(\alpha, p_n) = 2n+3$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$B^-$