0,80

2

LISTOP

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

EXAMEN FINAL

(27/12/05)

NOMBRE Y APELLIDO:

N° DE LIBRETA: N° DE HOJAS ENTREGADAS:

e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIE LAS PROPIEDADES QUE UTILIZA

1. (25 puntos)
   (a) Sean A y B sucesos de un espacio muestral. Probar que
   $$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$
   (b) Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestra. Probar que
   $$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$
   Sugerencia: Inducción.

2. (25 puntos) Juan y Pinchame combinan para encontrarse en el río entre las 14 y las 15 horas, dando por entendido que ninguno esperará al otro más de 15 minutos. Asumir que iguales intervalos de tiempo tienen asociados iguales probabilidades de llegada y que ambos actúan de forma independiente.
   (a) Hallar la probabilidad de que Juan llegue antes que Pinchame.
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan y Pinchame se encuentren?

3. (25 puntos)
   (a) Probar que si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ y $V(\hat{\theta}) > 0$ entonces $(\hat{\theta})^2$ no es un estimador insesgado de θ^2.
   (b) Sea $\hat{\theta}$ es un estimador de θ y $b = E(\hat{\theta}) - \theta$ su sesgo. Probar que el error cuadrático medio de $\hat{\theta}$ vale $V(\hat{\theta}) + b^2$.

Obs: $ECM = E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$

4. (25 puntos)

(a) Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $P(\lambda)$ que miden el número de interrupciones que tiene un sistema en un período dado y que el tamaño muestral, n, es suficientemente grande. Deduzca un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para el número esperado de interrupciones basándose en la muestra dada.

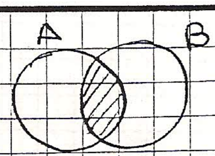
(b) Sea π la probabilidad de que no haya interrupciones en el período dado. Proponga un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para π.

(c) Si para una muestra determinada el intervalo hallado en el ítem anterior fuera $(0.09145, 0.20029)$, ¿que decisión tomaría al testear las siguientes hipótesis?

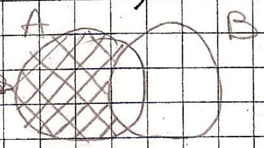
$$H_0 : \pi = 0.15 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \pi \neq 0.15$$

¿Con qué nivel tomaría esta decisión? Justificar detalladamente.

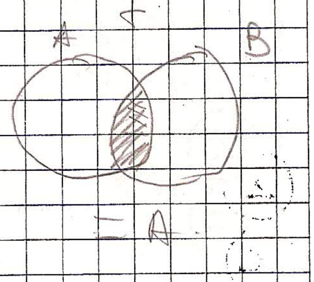
EX. FINAL 27/12/05.

(1) a) 

Claram $P(A\cap B) \leq P(A) \leq P(A\cup B)$



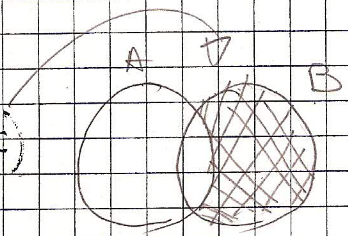
$$A = (A\cap B^c) \underset{\text{unión disj}}{\cup} (A\cap B) \qquad (A\cap B^c) \to$$



Luego $P(A) = \underbrace{P(A\cap B^c)}_{\geq 0} + P(A\cap B)$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B) \leq P(A) \qquad (1)$$

Además $A\cup B = A \underset{\text{unión disj.}}{\cup} (B\cap A^c)$



$$P(A\cup B) = P(A) + \underbrace{P(B\cap A^c)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cup B) \geq P(A) \qquad (2)$$

de (1) y (2) resulta lo que se quiere probar.-

b) $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Por inducción

$n=1$. $P(A_1) \leq P(A_1)$ vale!

Sup. que vale para n.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) =$$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) + P(A_{m+1}) - \underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \cap A_{m+1}\right)}_{\geq 0} \leq$$

$$\leq P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) + P(A_{m+1}) \underset{\text{h. induct}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} P(A_i) + P(A_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} P(A_i)$$

2

a)

X: tiempo en que llega Juan al río

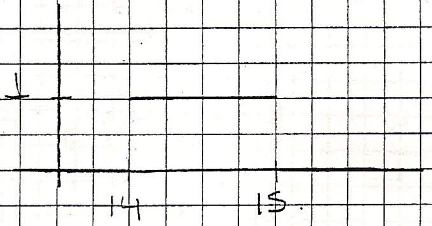
Y: " " " " Pinchame al río

$X \sim U[14, 15]$

$Y \sim U[14, 15]$

X, Y independientes.

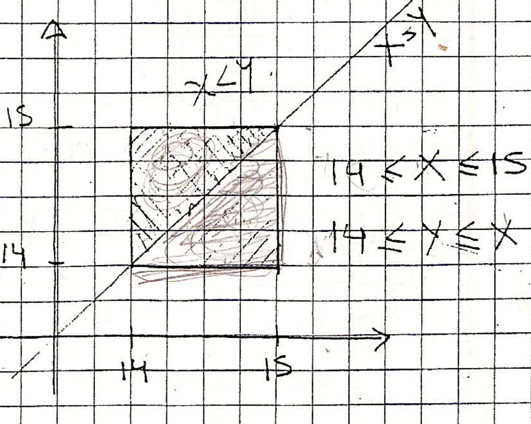
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [14, 15] \\ 0 & \text{fuera.} \end{cases}$$



$$f_X(x) = 1 \cdot I_{[14,15]}(x)$$

$$f_Y(y) = 1 \cdot I_{[14,15]}(y)$$

$$f_{XY}(x,y) = I_{[14,15]}(x) \; I_{[14,15]}(y)$$



$$P(X<Y) = \int_{14}^{15}\int_{14}^{x} 1 \, dy \, dx =$$

$$= \int_{14}^{15} \left(y \Big|_{14}^{x} \right) dx = \int_{14}^{15} (x-14)\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 14x \Big|_{14}^{15} = \left(\frac{15^2}{2} - 14 \cdot 15 \right) - \left(\frac{14^2}{2} - 14^2 \right) =$$

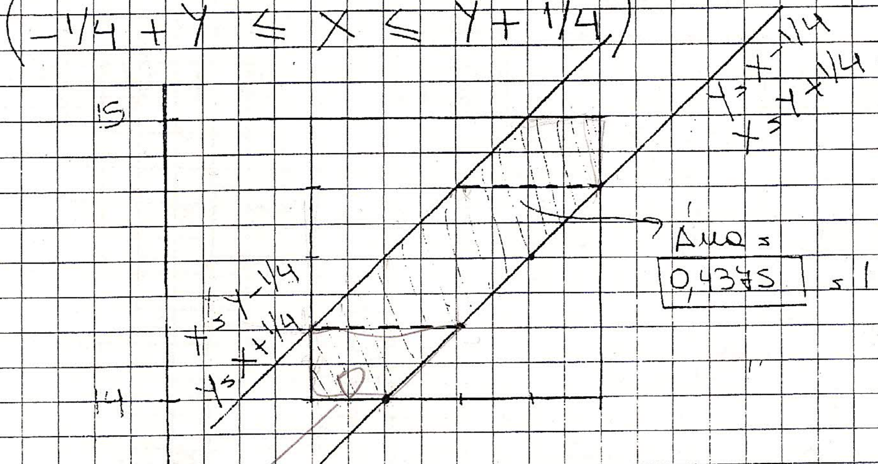
$$= -97{,}5 - (-98) = \boxed{0{,}5} \quad (\text{área del } \triangledown)$$

b) P(Juan y Pinchonne se encuentren) =

$$= P\left(|X-Y| \leq 1/4 \right) =$$

$$= P\left(-1/4 \leq X-Y \leq 1/4 \right) =$$

$$= P\left(-1/4 + Y \leq X \leq Y + 1/4 \right)$$



Área = $\boxed{0{,}4375} = 1 - (0{,}75)^2$

$$\int_{14}^{14{,}25} \int_{14}^{y+1/4} dx\, dy + \int_{14{,}25}^{14{,}75} \int_{y-1/4}^{y+1/4} dx\, dy + \int_{14{,}75}^{15} \int_{y-1/4}^{15} dx\, dy =$$

$$= \int_{14}^{14,25} y + \frac{1}{4} - 14 \, dy + \int_{14,25}^{14,75} \frac{1}{2} \, dy + \int_{14,75}^{15} 15 - y + \frac{1}{4} \, dy =$$

$$= \int_{14}^{14,25} y - 13,75 \, dy + \frac{1}{2} y \Big|_{14,25}^{14,75} + \int_{14,75}^{15} 15,25 - y \, dy =$$

$$= \frac{y^2}{2} - 13,75 y \Big|_{14}^{14,25} + \frac{1}{2} 14,75 - \frac{1}{2} 14,25 +$$

$$+ 15,25 y - \frac{y^2}{2} \Big|_{14,75}^{15} =$$

$$= \frac{(14,25)^2}{2} - 13,75 \cdot 14,25 - \frac{14^2}{2} + 13,75 \cdot 14 + \frac{1}{2} 14,75 - \frac{1}{2} 14,25$$

$$+ 15,25 \cdot 15 - \frac{15^2}{2} - 14,75 \cdot 15,25 + \frac{(14,75)^2}{2} =$$

$$= 7,46875 - 7,03125 = \boxed{0,4375}$$

③ a) $E(\hat{\theta}) = \theta \qquad V(\hat{\theta}) > 0$

$$V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - E(\hat{\theta})^2 = E(\hat{\theta}^2) - \theta^2$$

$$\Rightarrow E(\hat{\theta}^2) = V(\hat{\theta}) + \theta^2 \neq \theta^2 \text{ pues } V(\hat{\theta}) > 0$$

$\Rightarrow \hat{\theta}^2$ no es estim insesgado de θ^2

b) $\hat{\theta}$ estim de θ

$b = E(\hat{\theta}) - \theta$ es su sesgo

$$ECM(\hat{\theta}) = E\left((\hat{\theta}-\theta)^2\right) =$$

$$= E\left(\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2\right) =$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - 2\theta E(\hat{\theta}) + \theta^2 =$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - E(\hat{\theta})^2 + E(\hat{\theta})^2 - 2\theta E(\hat{\theta}) + \theta^2 =$$

$$= V(\hat{\theta}) + (\underbrace{E(\hat{\theta}) - \theta}_{b})^2 = V(\hat{\theta}) + b^2$$

4 a) $X_1, X_2 \ldots X_m$ ma $\mathcal{P}(\lambda)$

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{P}(m\lambda)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = m\lambda \qquad V\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = m\lambda$$

Por el TCL $\Rightarrow$ $$\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i - m\lambda}{\sqrt{m\lambda}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$\hat{\lambda} = \overline{X}$ es un estim consist de λ pues por la LGN $\hat{\lambda} \xrightarrow{P} \lambda \Rightarrow \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \xrightarrow{P} 1$

húsares

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i - m\lambda}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{\bar{x}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

λ lambda

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum x_i - m\lambda}{\sqrt{m}\,\sqrt{\bar{x}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq \underbrace{1-\alpha}_{0,95}$$

$\alpha = 0,05$

despejando λ

$$P\left(\underbrace{\frac{\sum x_i - z_{\frac{0,05}{2}}\sqrt{\sum x_i}}{m}}_{a} \leq \lambda \leq \underbrace{\frac{\sum x_i + z_{\frac{0,05}{2}}\sqrt{\sum x_i}}{m}}_{b}\right)$$

$\simeq 0,95$

b) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\pi = P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

Como un int de conf. de nivel aprox 0,95 para $e^{-\lambda}$

$$\Rightarrow \left(e^{-b} \,;\, e^{-a}\right)$$

pues $P(a \leq \lambda \leq b) \simeq 0,95$

$$P(-b \leq -\lambda \leq -a) \simeq 0,95$$

$$P(e^{-b} \leq \underbrace{e^{-\lambda}}_{\pi} \leq e^{-a}) \simeq 0,95$$

c) La decisión, dado que $0,15 \in$ al intervalo dado, sería no rechazar H_0.

húsares