19/02/2015 FINAL DE ANÁLISIS II (C) -
- ANÁLISIS I (M, Q) - MATEMÁTICA 1 (F, A, O)

1) Dada $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| \leq |xy| + y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Probar que $f$ es diferenciable en $(0,0)$ y hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en el origen

2) Sea $f$ de clase $C^1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f' > 0$. Suponiendo que existe un $x_0$ tal que $f(x_0) > 0$, Probar que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

diverge

3) Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$, tal que $\nabla F(P) \neq \vec{0}$ con $P$ perteneciente a la curva de nivel $C$. Probar que $\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente de $C$ en $P$

~~4) Probar que~~

4) Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$, probar que $F$ es continua en $P$ si y solo si para toda sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\lim_{k \to +\infty} P_k = P$ entonces $\lim_{k \to +\infty} f(P_k) = f(P)$

1) • Primero calculo $f(0,0)$, $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$

$$0 \leq |f(0,0)| \leq |0.0| + 0^2 \Rightarrow 0 \leq |f(0,0)| \leq 0 \Rightarrow f(0,0) = 0$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h}$$

$$0 \leq |f(h,0)| \leq |h.0| + 0^2 = 0 \Rightarrow f(h,0) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 = f'_x(0,0)$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h}$$

$$0 \leq |f(0,h)| \leq |0.h| + h^2 = h^2$$

$$0 \leq \left|\frac{f(0,h)}{h}\right| \leq \frac{|0h| + h^2}{|h|} = \frac{h^2}{|h|} = |h|$$

$$0 = \lim_{h\to 0} 0 \leq \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(0,h)}{h}\right| \leq \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(0,h)}{h}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = 0 = f'_y(0,0)$$

Como existen $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$ falta probar que se cumpla el límite de diferenciabilidad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)(x-0) - f'_y(0,0)(y-0)|}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0$$

Reemplazando

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - 0 - 0.x - 0.y|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|}$$

Pruebo por definición que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ /\ \forall (x,y): 0 < \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} - 0 \right| = \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{|xy| + y^2}{\|(x,y)\|} \leq \frac{\|(x,y)\|^2 + \|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \frac{2\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} = 2\|(x,y)\| < 2\delta < \varepsilon$$

Tomo

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

La ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en el origen está dado por

$$z = f(0,0) + f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0)$$

Reemplazando queda

$$z = 0 + 0.x + 0.y$$

$$\boxed{z = 0}$$

3) Como $\nabla F(P) \neq 0$, $F \in C^1$ y $P \in C$ $\quad P=(a,b)$
(donde $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / F(x,y) = k, \ k \in \mathbb{R}\}$)

Por teorema de la función implícita existen U, V entornos, U entorno de a, V entorno de b y una función $h: U \to V$ tal que $F(x, h(x)) = k$, $y = h(x)$. Como $F$ es $C^1$, $h$ es $C^1$

Dado $\delta > 0$, la gráfica de $h$ (definida de la forma $(x, h(x))$) está contenida en una bola abierta centrada en $P$

Gráfica de $h \subset B_\delta(P)$

$h(a) = b \qquad$ gráfica de $h$ en $a$: $(a, h(a)) = (a,b)$

Tomo la función $f(x) = F(x, h(x))$ $\qquad f \in C^1$ por ser composición de $C^1$

$$f(a) = F(a, h(a)) = F(a,b) = F(P) = k$$

$$F(a, h(a)) = k$$

Derivando miembro a miembro

$$F'_x(a, h(a)) . 1 + F'_y(a, h(a)) . h'(a) = 0$$

$$F'_x(P) . 1 + F'_y(P) . h'(a) = 0$$

$$\langle \nabla F(P), (1, h'(a)) \rangle = 0$$

Como el producto interno entre estos dos vectores es 0, son perpendiculares

$$\nabla F(P) \perp (1, h'(a))$$

Y como $(1, h'(a))$ es el vector director de la recta tangente a P en C, $\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente a P en C