Anlisis I - Anlisis Matemtico I - Matemtica 1 - Anlisis II (C)
Examen Final (22-12-2021) Resuelto

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

(i) Determinar si f es continua y/o diferenciable en el $(0,0)$

(ii) Determinar si existen puntos donde el plano tangente al gráfico de f sea paralelo al plano $x+y+z=1$.

Solución: (i) Como

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = -1,$$

la función f no es continua en $(0,0)$. Por lo tanto tampoco es diferenciable

(ii) Sea (x_0,y_0) un punto con $x_0 \neq y_0$. Las derivadas parciales de f en (x_0,y_0) son

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{-2y_0}{(x_0-y_0)^2} \quad \text{y} \quad f_y(x_0,y_0) = \frac{2x_0}{(x_0-y_0)^2}.$$

Por lo tanto el plano T, tangente al gráfico de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, tiene ecuación

$$z - f(x_0,y_0) + \frac{2y_0}{(x_0-y_0)^2}(x-x_0) - \frac{2x_0}{(x_0-y_0)^2}(y-y_0) = 0.$$

Los planos T y $x+y+z=1$ son paralelos si y solo si sus vectores normales,

$$\left(\frac{2y_0}{(x_0-y_0)^2}, \frac{-2x_0}{(x_0-y_0)^2}, 1\right) \quad \text{y} \quad (1,1,1),$$

son paralelos. Para esto debe ser

$$\frac{2y_0}{(x_0-y_0)^2} = \frac{-2x_0}{(x_0-y_0)^2} = 1,$$

lo que ocurre si y solo si $x_0 = -y_0$ y $1 = \frac{-2x_0}{(2x_0)2} = -\frac{1}{2x_0}$. Así que debe ser $x_0 = -\frac{1}{2}$ e $y_0 = \frac{1}{2}$.

2. Hallar los puntos de la curva C que están más próximos al $(1,-1)$, donde C es la parábola $y = x^2+2$

Solución: Debemos encontrar el mínimo de la función $F(x,y) = (x-1)^2 + (y+1)^2$, sobre la curva $y = x^2+2$. Consideremos la función $g(x) = F(x,x^2+2) = (x-1)^2+(x^2+3)^2$. Para resolver el ejercicio será suficiente encontrar el mínimo de g. Los puntos críticos satisfacen

$$g'(x) = 2(x-1) + 2(x^2+3)2x = 4x^3 + 14x - 2 = 0.$$

Cmo g' es creciente (porque $g''(x) = 12x^2+14$ es siempre positiva), $g'(0) = -2$ y $g'(1) = 16$, existe un único x_0 tal que $g'(x_0) = 0$. Como g' es negativa a la izquierda de x_0, y positiva a la derecha, g tiene un mínimo en x_0. Por lo tanto F tiene un mínimo en (x_0, x_0^2+2). Se puede ver que $x_0 \approx 0,14$.

3. Probar que si una función f de dos variables satisface la siguiente ecuación, denominada la *ecuación de Laplace*:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0,$$

entonces la función $g(x,y) = f(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ también la satisface si $(x,y) \neq (0,0)$.

Solución: Escribamos $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$. Entonces $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Para simplificar la notación, en lo que sigue escribiremos g en lugar de $g(x,y)$ y f en lugar de $f(u(x,y), v(x,y))$, y análogamente para las derivadas.

Por la regla de la cadena,

$$g_x = f_u u_x + f_v v_x$$

y

$$g_y = f_u u_y + f_v v_y$$

usando ahora las reglas para las derivadas parciales de sumas, productos y composiciones (regla de la cadena), obtenemos

$$g_{xx} = f_{uu}u_x^2 + f_{uv}v_x u_x + f_u u_{xx} + f_{vu}u_x v_x + f_{vv}v_x^2 + f_v v_{xx}$$

y

$$g_{yy} = f_{uu}u_y^2 + f_{uv}v_y u_y + f_u u_{yy} + f_{vu}u_y v_y + f_{vv}v_y^2 + f_v v_{yy}$$

Entonces, sumando, usando el teorema de Clairaut-Schwarz y reordenando términos obtenemos,

$$\Delta g = f_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + f_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + 2f_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + f_u \Delta u + f_v \Delta v$$

donde estamos usando la notación clásica para el Laplaciano, o sea, $\Delta g = g_{xx} + g_{yy}$.

Por otra parte, usando la regla de derivada del cociente, obtenemos

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad v_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad v_x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

es decir $u_x = -v_y$ y $u_y = v_x$. De estas dos ecuaciones se deduce que $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2$ y $u_x v_x + u_y v_y = 0$, por lo que reemplazando en la expresión que habíamos obtenido para Δg obtenemos

$$\Delta g = (f_{uu} + f_{vv})(u_x^2 + u_y^2) + f_u \Delta u + f_v \Delta v$$

Pero el enunciado nos dice que $f_{uu} + f_{vv} = 0$, por lo tanto, para terminar el ejercicio basta ver que $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$. Estas dos igualdades pueden obtenerse directamente calculando derivadas segundas pero también se pueden deducir usando las relaciones que habíamos obtenido entre las derivadas de u y v, en efecto,

$$u_x = -v_y \Longrightarrow \quad u_{xx} = -v_{yx}$$

y

$$u_y = v_x \Longrightarrow \quad u_{yy} = v_{xy}$$

y usando el teorema de Clairaut-Schwarz y sumando resulta $\Delta u = 0$. De manera análoga se ve que $\Delta v = 0$.

4. Hallar el volumen del sólido limitado por los planos $z = 0$, $z = 4$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al paraboloide $x^2 + y^2 - z = 1$.

Solución: un punto está en el sólido R mencionado en el ejercicio si y solo si sus coordenadas cilíndricas (r, θ, z) satisfacen $0 \leq z \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $1 \leq r \leq \sqrt{1+z}$. por lo tanto, el volumen $V(R)$, de R es

$$
\begin{aligned}
V(R) = \iiint_R 1\ dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_1^{\sqrt{1+z}} r\ drdzd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \left. \frac{r^2}{2} \right|_1^{\sqrt{1+z}} dzd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \frac{z}{2}\ dzd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left. \frac{z^2}{4} \right|_0^4 d\theta \\
&= 8\pi.
\end{aligned}
$$