Aprobado

Probabilidad y Estadística (C) - Verano 2018

PRIMER PARCIAL - 26 DE FEBRERO DE 2018

Nombre y Apellido: NICOLÁS HERTZULIS

Cantidad Total de Hojas: 4

	1	2	3	4	Calificación Total
Puntaje del ejercicio	25	25	25	25	100
Puntaje obtenido	25	25	20	25	95

Para aprobar es **suficiente** tener 2 ejercicios completos bien y sumar al menos 60 puntos

Por favor, **hacer cada ejercicio en hoja aparte.** *Numerar todas las hojas, colocar el nombre en ellas e indicar en la última hoja antes de la firma el número total de hojas.*

- Justifique todas sus respuestas -

---

1. (25 puntos) En un programa de juegos donde el premio es una moto, Guido K. primero le hace tres preguntas a un participante. El participante tiene probabilidad $1/2$ de contestar correctamente cada una y se puede asumir independencia entre los eventos de contestar bien cada una de ellas. Luego, le deja elegir k llaves de un total de 7, donde k es la cantidad de respuestas correctas del participante. Exactamente una de esas llaves es la que enciende la moto, y el participante se la gana cuando esa llave está entre las k elegidas.

   (a) (7 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el participante se gane la moto sabiendo que contestó al menos dos preguntas correctamente?

   (b) (10 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el participante se gane la moto?

   (c) (5 puntos) Sabiendo que el participante ganó la moto, ¿cuál es la probabilidad de que haya contestado las tres preguntas correctamente?

   (d) (3 puntos) ¿Son independientes los eventos "El participante ganó la moto" y "El participante contestó las tres preguntas correctamente"?

2. (25 puntos) En una granja hay 10 gallinas. Cada una en cada día pone 0 huevos con probabilidad 0.3, pone exactamente 1 huevo con probabilidad p y pone exactamente 2 huevos con probabilidad $0.7 - p$. La cantidad de huevos puestos por las diferentes gallinas son independientes y para cada gallina, la cantidad de huevos que pone entre los distintos días también son independientes. Un día se dice **productivo** si alguna gallina puso más de 1 huevo. Se sabe que la probabilidad de que un día sea productivo es igual a 0.8926.

   (a) (12 puntos) Hallar p, la esperanza y la varianza del número de huevos que pone una gallina en un día.

(b) (5 puntos) Hallar la probabilidad de que hayan exactamente 6 días productivos en una semana (7 días).

(c) (8 puntos) Cuando todos los días de la semana son productivos, el granjero hace una fiesta. Hallar la probabilidad de que la segunda fiesta se realice al terminar la quinta semana.

3. (25 puntos) La altura en centímetros de los cerdos en una granja es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal. Se sabe que la probabilidad de que un cerdo mida más de 93 cm. es igual a la probabilidad de que mida menos de 87 cm. y ambas probabilidades son iguales a 0.1.

   (a) (10 puntos) Hallar la esperanza y la varianza de X.

   (b) (7 puntos) Se toman tres cerdos al azar en la granja. ¿Cuál es la probabilidad de que el mínimo de sus alturas sea al menos 90 cm.?

   (c) (8 puntos) Sea $\sigma = \sqrt{\mathrm{VAR}(X)}$ el desvío estándar de X. Hallar la probabilidad de que la altura de un cerdo en la granja diste de su valor esperado en menos de σ cm. La probabilidad hallada, ¿depende de los valores de $\mathbb{E}(X)$ y $\mathrm{VAR}(X)$?

4. (25 puntos) Supongamos que las variables aleatorias X e Y tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} cx^2 + \frac{xy}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) (7 puntos) Hallar c.

   (b) (7 puntos) Hallar $\mathbb{P}(X + Y \geq 1)$.

   (c) (7 puntos) Hallar la covarianza entre X e Y.

   (d) (4 puntos) Determinar si X e Y son independientes, justificando adecuadamente.

Ejercicio 1:

3 preguntas con proba $\frac{1}{2}$ de acertar en c/u
Luego elige k entre 7 llaves donde k es el nro. de respuestas correctas. Gana si la única llave correcta está entre las k elegidas.

a) variable aleatoria $X =$ "# respuestas correctas" $X \sim Bi(3, \frac{1}{2})$

$R_X = \{0,1,2,3\}$

evento $A = \{$"Elige la llave correcta"$\}$

Nos piden P("Gana la moto sabiendo que contestó al menos dos bién")

$$= P(A | X \geq 2) = \frac{P(A \cap X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(A \cap (X=2 \cup X=3))}{P(X=2 \cup X=3)}$$

$$= \frac{P((A \cap X=2) \cup (A \cap X=3))}{P(X=2 \cup X=3)} \underset{\uparrow}{=} \frac{P(A \cap X=2) + P(A \cap X=3)}{P(X=2) + P(X=3)}$$

(X=2 disjunto X=3)

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{P(A|X=2)\, p_X(2) + P(A|X=3)\, p_X(3)}{p_X(2) + p_X(3)} = (*)$$

(Definición proba condicional (o regla del producto))

$P(A | X = x) = ??$

variable aleatoria $Y =$ "# llaves correctas elegidas"

$Y|X=x \sim \mathcal{H}(7, 1, x)$ $R_{Y|X=x} = \{0,1\}$ (si $X \geq 1$)

$$P(A|X=2) = p_{Y|X=2}(1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{6}{2-1}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$P(A|X=3) = p_{Y|X=3}(1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{6}{3-1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow (*) = \frac{\frac{2}{7}\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{3}{7}\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0}{\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0} = \frac{\frac{2}{7}\frac{3}{8} + \frac{3}{7}\frac{1}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{9}{28} \cong 0,32$$

b) Nos piden P("Gana la moto")

$$= P(A) = \underbrace{P(A|X=1)}_{1/7}\underbrace{p_X(1)}_{3/8} + \underbrace{P(A|X=2)}_{2/7}\underbrace{p_X(2)}_{3/8}$$

Proba total

$$+ \underbrace{P(A|X=3)}_{3/7}\underbrace{p_X(3)}_{1/8} + \underbrace{P(A|X=0)}_{0}\underbrace{p_X(0)}_{1/8}$$

$$= 3/56 + 3/28 + 3/56 = 3/14$$

cuenta auxiliar:

$$P(A|X=1) = p_{Y|X=1}(1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{6}{1-1}}{\binom{7}{1}} = \frac{1}{7}$$

c) Nos piden P("Contestó las tres preguntas bien sabiendo que ganó la moto") =

$$= P(X=3|A) = \frac{P(X=3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|X=3)\,p_X(3)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{3}{7}\frac{1}{8}}{\frac{3}{14}} = \frac{1}{4}$$

calculados antes

d) ¿$A \perp\!\!\!\perp \{X=3\}$?

Si fueran independientes, entonces $P(X=3|A) = P(X=3)$

Pero $P(X=3|A) = \frac{1}{4}$ y $P(X=3) = \frac{1}{8}$

Luego, no son independientes.

Ejercicio 2: 10 gallinas

variable aleatoria X = "# huevos que pone una gallina en un día"

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.3 & \text{si } x=0 \\ p & \text{si } x=1 \\ 0.7-p & \text{si } x=2 \end{cases}$$

Las gallinas son independientes.

Los días son independientes.

$R_X = \{0, 1, 2\}$

a) Nos piden $E(X)$ y $V(X)$

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, P_X(x) = 0(0.3) + 1p + 2(0.7-p) = \frac{7}{5} - p$$

¿Cuánto vale p?

variable aleatoria Y = "# gallinas que pusieron dos huevos (gallinas productivas) en un día"

$Y \sim \text{Binomial}(10,\ 0.7-p)$ $\quad R_Y = \{0, 1, \ldots, 10\}$

$$P(\text{"Día productivo"}) = P(Y \geq 1) = 1 - P_Y(0) = 1 - \binom{10}{0}(0.7-p)^0(1-0.7+p)^{10}$$

$$= 1 - (0.3+p)^{10} = 0.8926$$

Es dato

$$\iff (0.3+p)^{10} = 0.1074 \iff \log(0.3+p) = \frac{\log(0.1074)}{10}$$

$$\iff (0.1074)^{\frac{1}{10}} = 0.3 + p \iff (0.1074)^{\frac{1}{10}} - 0.3 = p \implies \boxed{p \cong \frac{1}{2}}$$

$$\implies E(X) = \frac{7}{5} - \frac{1}{2} = 0.9$$

$$E(X^2) = 0^2(0.3) + 1^2(0.5) + 2^2(0.7-0.5) = 1.3$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1.3 - (0.9)^2 = 0.49$$

b) variable aleatoria Z = "# días productivos en una semana de 7 días"

$Z \sim Binomial(7, q)$ con $q = P(\text{"Día productivo"}) = 0.8926$

Nos piden $P(Z=6)$

$$= \binom{7}{6} (0.8926)^6 (0.1074)^1 \cong 0.3802$$

c) variable aleatoria L = "# semanas necesarias para la segunda fiesta"

$$P_Z(7) = \binom{7}{7} (0.8926)^7 (0.1074)^0 = 0.4514$$

$L \sim$ Binomial Negativa $(2, \; 0.4514)$ $\quad R_L = \{2, 3, \ldots\}$

Nos piden $P_L(5)$

$$= \binom{4}{1} (0.4514)^2 (0.5486)^3 \cong 0.13457$$

Ejercicio 3: $\left.\begin{array}{l} X \sim Normal(\mu, \sigma^2) \\ P(X>93) = P(X<87) = 0.1 \end{array}\right\}$ Datos

a) Nos piden $E(X)$ y $V(X)$

- $P(X<87) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{87-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{87-\mu}{\sigma}\right) = 0.1$ Es dato

$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{-87+\mu}{\sigma}\right) = 0.1 \Rightarrow \frac{-87+\mu}{\sigma} = 1.28$

- $P(X>93) = 1 - P(X \leq 93) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{93-\mu}{\sigma}\right)$

$= 1 - \Phi\left(\frac{93-\mu}{\sigma}\right) = 0.1 \Rightarrow \Phi\left(\frac{93-\mu}{\sigma}\right) = 0.9 \Rightarrow \frac{93-\mu}{\sigma} = 1.28$

Es dato

Tenemos:

$$\begin{cases} -87+\mu = 1.28\,\sigma \\ 93-\mu = 1.28\,\sigma \end{cases} \Rightarrow -87+\mu = 93-\mu \Rightarrow \boxed{\mu = 90 = E(X)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{75}{32} = 2.34375} \Longrightarrow \boxed{V(X) = \sigma^2 = \frac{5625}{1024} = 5.493}$$

La esperanza también se puede calcular usando la simetría de la distribución normal: $E(X) = \frac{93+87}{2} = 90$

(tomando en cuenta que $P(X>93) = P(X<87)$)

b) 3 cerdos: $X_1, X_2, X_3 \sim \text{Normal}\left(90, \frac{5625}{1024}\right)$

Nos piden $P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq 90)$

$= P(X_1 \geq 90 \cap X_2 \geq 90 \cap X_3 \geq 90)$

$= P(X_1 \geq 90)\, P(X_2 \geq 90)\, P(X_3 \geq 90) = \left(1 - P(X_1 < 90)\right)^3$

Supongo independencia

$= \left[1 - \Phi\left(\frac{90-90}{\sqrt{5625/1024}}\right)\right]^3 = \left(1 - \Phi(0)\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

c) Nos piden $P(|X - E(X)| < \sigma)$

$= P(-\sigma < X - \mu < \sigma) = P\left(\frac{-\sigma}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\sigma}{\sigma}\right)$

$= P\left(-1 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1))$

$= 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

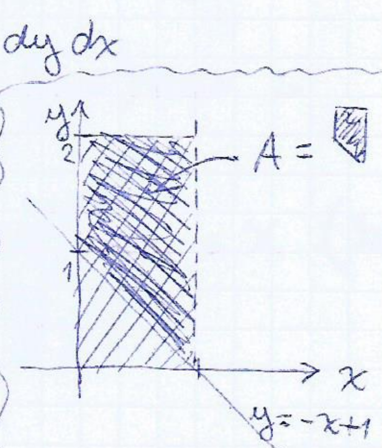
La probabilidad hallada no depende de $E(X) = \mu$ ni de $V(X) = \sigma^2$ pues como se ve en las cuentas de arriba, termina siendo equivalente a la probabilidad de que el valor de una variable aleatoria con distribución normal estándar esté entre -1 y 1.

Ejercicio 4:

a) $\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 1 = \int_0^1 \int_0^2 cx^2 + \frac{xy}{3}\, dy\, dx$

$= \int_0^1 \left(cx^2 y + \frac{xy^2}{6}\right)\Big|_0^2 dx = \int_0^1 \left(2cx^2 + \frac{2x}{3}\right) dx$

$= 2\left(\frac{cx^3}{3} + \frac{x^2}{6}\Big|_0^1\right) = 2\left(\frac{c}{3} + \frac{1}{6}\right) \Rightarrow \boxed{c = 1}$



$-x+1 \leq y \leq 2$

$0 \leq x \leq 1$

b) $P(X+Y \geq 1) = P(Y \geq -X+1)$

$= \iint_A f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$

$= \int_0^1 \int_{-x+1}^2 x^2 + \frac{xy}{3}\, dy\, dx$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{x y^2}{6} \Big|_{-x+1}^{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 + \frac{2}{3}x - (-x+1)x^2 - x\frac{(-x+1)^2}{6} \quad dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 + \frac{2}{3}x + x^3 - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{2x^2}{6} - \frac{x}{6}\, dx = \int_0^1 \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\, dx$$

$$= \left(\frac{4x^3}{9} + \frac{5x^4}{24} + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{9} + \frac{5}{24} + \frac{1}{4} = \frac{65}{72} \cong 0.9027$$

c) $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$

Funciones de densidad marginales:

- $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\, dy = \int_0^2 x^2 + \frac{xy}{3}\, dy = \left(x^2 y + \frac{xy^2}{6} \right) \Big|_0^2 = 2x^2 + \frac{2}{3}x$
- $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\, dx = \int_0^1 x^2 + \frac{xy}{3}\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{y}{6} + \frac{1}{3}$

Esperanzas:

- $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 2x^3 + \frac{2}{3}x^2\, dx = \left(\frac{x^4}{2} + \frac{2}{9}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{13}{18}$
- $E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^2 \frac{y^2}{6} + \frac{y}{3}\, dy = \left(\frac{y^3}{18} + \frac{y^2}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{10}{9}$
- $E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^2 xy \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy\, dx$

$$= \int_0^1 \int_0^2 x^3 y + \frac{x^2 y^2}{3}\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3 y^2}{2} + \frac{x^2 y^3}{9} \right) \Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 2x^3 + \frac{8}{9}x^2\, dx = \left(\frac{x^4}{2} + \frac{8}{27}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{43}{54}$$

$$\therefore \operatorname{cov}(X,Y) = \frac{-1}{162}$$

d) X e Y no son independientes pues $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$