FINAL DE ÁLGEBRA I
(27-05-22)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"Nos dio el amor la única importancia."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Calcule cuántas funciones sobreyectivas f hay de $\{1, ..., 14\}$ en $\{1, ..., 9\}$ tales que $\#f^{-1}(\{1, 2\}) = 7$.

Resolución:

De los catorce elementos del dominio, exactamente siete tienen que ir a parar a $\{1,\ 2\}$, de manera tal que al menos uno vaya al 1 y al menos uno vaya al 2, pues la asignación debe ser sobreyectiva. La cantidad de formas de elegir tales elementos del dominio es $\binom{14}{7}$, y la cantidad de formas de asignarles a los elementos de cada uno de esos subconjuntos de siete elemementos las imágenes correspondientes es $\sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k}$, pues $\binom{7}{k}$ es la cantidad de formas de asignarle a k de esos elementos el 1 (y por lo tanto a los restantes $7 - k$ el 2). Una vez hecha tal asignación quedan siete elementos en el dominio y siete en el codominio, y por lo tanto la cantidad de formas de asignarles de manera sobreyectiva imágenes a los elementos restantes del dominio es 7!. Se concluye entonces que la cantidad a calcular de funciones es $7!\binom{14}{7}\sum_{k=1}^{6}\binom{7}{k}$.

$\blacksquare$

Ejercicio 2

Encuentre todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que

$$3a \equiv 7 \pmod{23} \quad \text{y} \quad (2a+5 : 13a-2) \neq 1.$$

Resolución:

Tenemos que

$$3a \equiv 7 \pmod{23} \iff 8 \cdot 3a \equiv 8 \cdot 7 \pmod{23} \iff 24a \equiv 56 \pmod{23}$$
$$\iff a \equiv 10 \pmod{23},$$

donde la primer equivalencia vale pues $8 \perp 23$. Luego, $a = 23b + 10$ para $b \in \mathbb{Z}$.

Entonces,

$$(2a+5 : 13a-2) \neq 1 \iff (2(23b+10)+5 : 13(23b+10)-2) \neq 1$$
$$\iff (46b+25 : 299b+128) \neq 1.$$

Si $d = (46b+25 : 299b+128)$, resulta

$$d \mid 46b+25 \text{ y } d \mid 299b+128 \Rightarrow d \mid 13 \cdot 46b + 13 \cdot 25 \text{ y } d \mid 2 \cdot 299b + 2 \cdot 128$$
$$\Rightarrow d \mid 598b+325 \text{ y } d \mid 598b+512 \Rightarrow d \mid 187.$$

Como debe ser $d \neq 1$ y 187 es un número primo, debe ser $d = 187$, así que debemos hallar los valores de $b \in \mathbb{Z}$ para que eso suceda. Tenemos que:

- $187 \mid 598b+325 \iff 598b+325 \equiv 0 \pmod{187}$
  $\iff 37b \equiv -325 \pmod{187} \iff 37b \equiv 49 \pmod{187}$
  $\iff 5 \cdot 37b \equiv 5 \cdot 49 \pmod{187} \iff 185b \equiv 245 \pmod{187}$
  $\iff -2b \equiv 58 \pmod{187} \iff b \equiv -29 \pmod{187}$
  $\iff b \equiv 158 \pmod{187}$ (usamos que -2 y 5 son coprimos con 187).
- $187 \mid 598b+512 \iff 598b+512 \equiv 0 \pmod{187}$
  $\iff 37b \equiv -512 \pmod{187} \iff 37b \equiv 49 \pmod{187}$, concluyendo lo mismo que antes.

Entonces, debe ser $b = 187c + 158$ con $c \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto los valores de a buscados son los de la forma $a = 23(187c + 158) + 10 = 4301c + 3644$ con $c \in \mathbb{Z}$, es decir, $a \equiv 3644 \pmod{4301}$.

■

Ejercicio 3

Calcule $\sum_{k=0}^{29} sen(\frac{2k\pi}{30})$.

Resolución:

Como $\sum_{w \in G_{30}} w = 0$ y $G_{30} = \{e^{\frac{2k\pi}{30}i} : k \in \{0, 1, ..., 29\}\}$, resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{29} e^{\frac{2k\pi}{30}i} = \sum_{k=0}^{29} \left(cos\left(\frac{2k\pi}{30}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{30}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{29} cos\left(\frac{2k\pi}{30}\right) + i\sum_{k=0}^{29} sen\left(\frac{2k\pi}{30}\right) \end{aligned}$$

, lo que implica que $\sum_{k=0}^{29} sen(\frac{2k\pi}{30}) = 0$.

■

Ejercicio 4

Sea $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 8. Factorice P en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que:

- P tiene exactamente 5 raíces,
- $1 + i$ y $2 - \sqrt{3}$ son raíces simples de P,
- $P(2) = 0$ y $P(0) = 4$.

Resolución:

Como $1+i$ y $2-\sqrt{3}$ son raíces simples de P y $P \in \mathbb{Q}[X]$, $1-i$ y $2+\sqrt{3}$ también son raíces simples de P. Como además P tiene grado 8, exactamente 5 raíces y $P(2)=0$, resulta

$$P(X) = a(X-(1-i))(X-(1+i))(X-(2-\sqrt{3}))(X-(2+\sqrt{3}))(X-2)^4$$

, para cierto $a \in \mathbb{R}$ a determinar. Luego,

$$P(X) = a(X^2-2X+2)(X^2-4X+1)(X-2)^4$$

, y por lo tanto $P(0)=4$ implica $a \cdot 2 \cdot 1 \cdot 16 = 4$, así que $a = \frac{1}{8}$. Entonces, las factorizaciones de $P(X)$ son:

$$\frac{1}{8}(X^2-2X+2)(X^2-4X+1)(X-2)^4 \text{ en } \mathbb{Q}[X],$$

$$\frac{1}{8}(X^2-2X+2)(X-(2-\sqrt{3}))(X-(2+\sqrt{3}))(X-2)^4 \text{ en } \mathbb{R}[X], \text{ y}$$

$$\frac{1}{8}(X-(1-i))(X-(1+i))(X-(2-\sqrt{3}))(X-(2+\sqrt{3}))(X-2)^4 \text{ en } \mathbb{C}[X].$$

$\blacksquare$