2

1	2	3	4	Nota
25	7/0/7 2/6	10/9/X	8/5/0	79

APROBADO

Probabilidad y Estadística (C)

Segundo Parcial - 03/07/2014

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen. Antes de retirarse debe firmar una hoja de asistencia.

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted] LIBRETA N°: [redacted]

Turno(tachar lo que no corresponda): Tarde: Ma-Ju 14 a 17 hs. ~~Noche: Ma-Ju 19 a 22 hs.~~

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario reunir 60 puntos.

En los ejercicios donde corresponda, defina con palabras las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

Realizar cada ejercicio en hoja separada. *Enumerar todas las hojas y colocar el número total de hojas entregadas, además escribir el apellido en cada una.*

1. (***25 puntos***) La división de obras y catastro de la Ciudad de Buenos Aires está interesada en realizar un estudio sobre los dispositivos de seguridad en los locales bailables. Un buen indicador de la rapidez en una evacuación es la máxima distancia (Y) a la salida de emergencia. Se encontró que esta distancia (medida en metros) está dada por una variable aleatoria Y con distribución exponencial de parámetro 0.1. Se eligen al azar 64 locales bailables. Si el promedio de dichas distancias es menor a 8 metros se considerará que salvo excepciones los locales presentan buenos sistemas de seguridad y se habilitarán en su totalidad, mientras que si el promedio es superior a 12 se rechazarán todos los pedidos de habilitación. En caso de que no ocurra ninguna de las dos posibilidades anteriores, se enviará un inspector a cada local para analizar personalmente la habilitación del local.

a) (*13 puntos*) Calcular de manera aproximada la probabilidad de que se deba enviar un inspector a cada local.

b) (*12 puntos*) ¿Cuántos locales deben elegirse al azar para *garantizar* que la probabilidad de tener que enviar a un inspector a cada local esté acotada inferiormente por 0.93?

2. (***28 puntos***) Para determinar si una máquina envasadora está envasando la cantidad correcta de membrillo en los potes se tomó una muestra de $n = 25$ potes y se midió los contenidos de membrillo (en gramos), obteniéndose los siguientes resultados (ordenados)

```
176.93 177.25 179.56 182.75 184.94 185.99 187.57 189.76 190.16 191.12 191.13 193.36 194.77
196.17 196.66 199.31 199.76 200.18 200.40 201.10 205.29 209.37 213.32 217.68 222.03
```

NO a) (*8 puntos*) Para la muestra dada, calcular la mediana muestral, el primer cuartil, el tercer cuartil y la distancia intercuartil.

NO b) (*4 puntos*) Construir un gráfico box-plot para este conjunto de datos utilizando las medidas calculadas en el ítem anterior. Determinar si hay o no presencia de outliers y, en caso de haber, indicar claramente cuáles son.

c) Supongamos que X="cantidad de membrillo envasado (en gramos) en un pote" $\sim N(\mu, 225)$.

i. (*7 puntos*) Construir un test de nivel exacto 0.05 para testear

$$H_0 : \mu = 200 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 200$$

basándose en una muestra $X_1, \ldots, X_n$ con la misma distribución que X. Defina claramente el estadístico pivote, su distribución bajo H_0 y la región de rechazo.

ii. (*3 puntos*) En base a los resultados obtenidos en la muestra y en función del test armado en el inciso anterior, ¿qué decisión toma? *Observación*: Si lo necesita puede usar que para esta muestra se tiene que $\sum_{i=1}^{25} x_i = 4884.56$.

iii. (*6 puntos*) Calcular la probabilidad de cometer error de Tipo II si la verdadera media es $\mu = 198$.

3. (*27 puntos*) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. con función de densidad dada por

$$f(x) = \frac{3}{\theta^3} x^2 \, I_{(0,\theta]}(x) , \qquad \theta > 0 .$$

[redacted]*ntos*) Hallar el estimador de momentos de [redacted]tóticamente insesgado. ¿Es un estimador consistente de θ?

b) (*8 puntos*) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

c) (*9 puntos*) Construir un intervalo de confianza de nivel aproximado $1-\alpha$ para θ. *Sugerencia*: Usar el estimador de momentos de θ.

4. (*20 puntos*) Sea (X, Y) un vector continuo con densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy^2 & \text{si } 0 < x < 1 ,\, |y| < x^2 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) (*8 puntos*) Hallar k.

b) (*8 puntos*) Hallar las densidades marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes? Justificar su respuesta.

c) (*4 puntos*) Calcular $P(2Y - X > 0)$.

2/5

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted] Ejercicio 1 - HOJA 1.

- $Y_i \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ es la distancia máxima a la salida de emergencia del i-esimo local bailable. Y_i son V.A.I.I.D porque son de locales diferentes y se asume que no tienen relación entre sí.

$Y_i \sim \mathcal{E}(0.1)$ de acuerdo al planteamiento del problema.

consecuencias inmediatas: $\bar{Y}$ es la V.A. promedio de $Y_1, \ldots, Y_n$

$$\mathbb{E}(Y_i)=10 \quad V(Y_i)=100 \quad n\bar{Y} \sim \Gamma(n, 0.1) \quad E(\bar{Y})=10 \quad Var(\bar{Y})=\frac{100}{n}$$

Otra concecuencia es que, de acuerdo con el Teoréma central del límite:

$$\frac{\bar{Y}-10}{\sqrt{100/n}} = \frac{\bar{Y}-E(\bar{Y})}{\sqrt{Var(\bar{Y})}} \sim A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} N(0,1)$$

Y además, según la desigualdad de Tchebychev:

$$P(|\bar{Y}-E(\bar{Y})| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\bar{Y})}{\varepsilon^2} \quad \text{o sea:} \quad P(|\bar{Y}-10| > \varepsilon) \leq \frac{100}{\varepsilon^2 n}$$

a) se envía un inspector si $\bar{Y} \in (8, 12)$ en la muestra con $n=64$.

Por el TCL (Teorema central del Límite)

$$\cancel{P(\bar{Y}\in(8,12))} = P\left(\frac{|\bar{Y}-10|}{10} \cdot 8 < \varepsilon\right) \approx 2(\phi(\varepsilon)-0.5) \quad \cancel{P\left(\frac{|\bar{Y}-10|}{10} \cdot 8 < 2\right)}$$

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$P(\bar{Y}\in(8,12)) = P\left(\frac{|\bar{Y}-10|}{10} \cdot 8 < 1{,}6\right) \approx 2(\phi(1{,}6)-0.5) = 2 \cdot 0{,}4452 = 0{,}8904$$

por tabla.

La probabilidad aproximada es: 89,04%

b)

$$P(\bar{Y}\in(8,12)) = 1 - P(|\bar{Y}-10| > 2) \geq 1 - \frac{100}{n \cdot 4} = 1 - \frac{25}{n} \geq 0{,}93$$

por Tchebychev.

$$\left\lceil \frac{25}{0.07} \right\rceil = 358$$

con $n = 358$ es suficiente

~~$[x]$ es el número entero a~~

$\lceil x \rceil$ es redondear x para arriba.

[redacted]

[redacted]

Ejercicio 2 - Hoja 1 (Hoja 2 del parcial)

a)

~~Como tiene 25 elementos la muestra y es ordenada, la mediana debe ser el elemento 13 de la muestra, el~~

$25 \notin 2 \Rightarrow [25/2]$

$i \in \{1, \dots, 25\}$ ~~sean~~ X_i los elementos de la muestra ordenados de menor a mayor:

Mediana de la muestra $F = \begin{cases} \text{tamaño de } F \in 2 \Rightarrow F_{ordenada}\left(\frac{\text{tamaño de } F}{2}\right) + F_{ord}\left(\frac{\text{tamaño } F}{2} + 1\right) \\ F_{ordenada}\left(\frac{\text{tamaño de } F + 1}{2}\right) \end{cases}$

Mediana de la muestra $X = \{ 25 \notin 2 \Rightarrow 194.77$

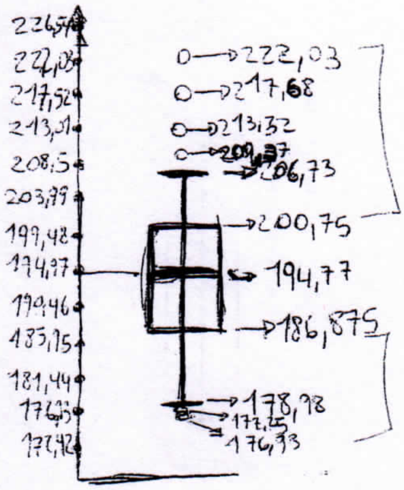
$\frac{X_{19} + X_{20}}{2}$

tercer cuartil (X) = mediana de la muestra $(X > \text{mediana}(X)) = 200{,}75$

primer cuartil (X) = mediana de la muestra $(X < \text{mediana}(X)) = \frac{X_6 + X_7}{2} = 186{,}875$

Distancia intercuartil de $X = 200{,}75 - 186{,}875 = 13{,}875$

b)



c) i) $P(H_0 \text{ rechazada} | H_0 \text{ cierta}) = 0{,}05 = 1 - P(H_0 \text{ aceptada} | H_0 \text{ cierta})$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$

$P(H_0 \text{ aceptada} | H_0 \text{ cierta}) = P\left(\underbrace{\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right|}_{\text{Pivote } T \sim N(0,1)} \leq a\right) = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2[\Phi(a) - 0{,}5]$

$a \,/\, (\Phi(a) - 0{,}5) \cdot 2 = 0{,}95$

$\Downarrow$

$a = 1{,}96$

$P\left(\frac{|\bar{X} - 200|}{15} \cdot 5 \leq 1{,}96\right)$

$-1{,}96 \leq \frac{\bar{X} - 200}{3} \leq 1{,}96$

[redacted]

$P(\overline{X} \notin (194{,}12,\ 205{,}88) \mid H_0 \text{ cierta}) = 0{,}05$

$\Downarrow$

RtA: Si LA media de LA muestrA no se HALLA en el intervalo $(194{,}12,\ 205{,}88)$ se rechazA H_0 ✓ ~~Aunque~~

ii) BASAndome en el DATO $\boxed{\sum_{i=1}^{25} x_i = 4884{,}56}$ $\overline{X}$ debe ser $195{,}3824$.

De Acuerdo A mi test, Acepto H_0.

NO! No rechazo H_0 (filosóficamente no es lo mismo)

iii) $H_0 : \mu = 198$

$P(\underbrace{H_0 \text{ se acepta} \mid H_0 \text{ es cierta}}_{\text{ok; aunque } \mu = 198 \text{ es más } H_1 \text{ que } H_0}) = P(\overline{X} \in (194.12, 205.88) \mid \mu = 198)$

$= P\left(\frac{\overline{X} - 198}{3} \in (-1{,}293,\ 2{,}63)\right) = 0.9957 - 0.0985$

$= 0.8972$ ✓

4/5

[redacted]

[redacted]

Ejercicio 3 - HOJA 1 (HOJA 3 del PARCIAL)

a) PARA CALCULAR el estimador de momentos de θ ($\hat{\theta}_{momentos}$) PRIMERO CALCULO LA ESPERANZA DE X

$$\mathbb{E}(\bar{X}_i) = \int_0^\theta f_X(x)\,x\,dx = \int_0^\theta \frac{3}{\theta^3} x^3\,dx = \frac{3}{4}\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\theta}_{momentos} = \frac{4}{3}\bar{x}$$

$\mathbb{E}(\hat{\theta}_{momentos})$ lo calculo para ver si $\hat{\theta}_{momentos}$ es insesgado, asintoticamente insesgado o es sesgado y no hay vuelta que darle.

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_{momentos}) = \mathbb{E}\left(\frac{\bar{x}4}{3}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\theta = \theta \Rightarrow$$ Es insesgado $\Rightarrow$ Es asintóticamente insesgado

$$P(|\hat{\theta}_{MOMENTOS} - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\hat{\theta}_{momentos})}{\varepsilon^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon n^2}\left[\int_0^\theta \frac{x^4}{\theta^3}3\,dx - \left(\int_0^\theta \frac{x^3}{\theta^3}3\,dx\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n\varepsilon^2}\,\theta^2\left(\frac{3}{5} - \frac{9}{16}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \theta$ es consistente.

c) $P\left(\left|\frac{\bar{x}-\theta}{\theta}\sqrt{15n}\right| < \varepsilon\right) \approx 2(\Phi(\varepsilon) - 1) = 1 - \alpha$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \qquad \Phi^{-1}(\Phi(x)) = x$$

$$\varepsilon = \Phi^{-1}\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)$$

b)

$$f(x_1)\cdots f(x_n) = f(x_1, \ldots, x_n; \theta)$$

$$\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{3}{\theta^3} x_i^2\, I_{[0,\theta]}\right) = L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$$

$$\ln(3) - 3n\ln(\theta) + 2\,\overline{\ln(x_i)}\,n = L(\ldots;\theta)$$

$$\theta \geq \max_{1\leq i\leq n}(x_i)$$

L es dec. con θ

$$\Downarrow$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \max_{1\leq i\leq n}(x_i)$$

[redacted]

[redacted]

EJERCICIO 4 (HOJA 4 del PARCIAL, HOJA 1 del ejercicio)

a) $\iint_{(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$ POR AXIOMAS de Teo de PROBA.

$1 = k \cdot \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} x y^2\, dy\, dx = k \int_0^1 x \left(\frac{x^6}{3} \cdot 2\right) dx = k \frac{1}{12}$

$k = 12$

b) $f_X(x) = \int_{-x^2}^{x^2} y\, dy\, k x\, \mathbb{I}_{(0,1)}(x) = x^7 \cdot 8\, \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$

$f_Y(y) = \left[\left(\int_{|y|}^{1} + \int_{-1}^{-|y|}\right) x\, dx\right] k y^2\, \mathbb{I}_{(-1,1)}(y) = 12 y^2 (1-y^2)\, \mathbb{I}_{(-1,1)}(y)$ No.

(Fijate que no integra 1, así que no puede ser función de densidad)

$(x,y) \in$ Algun CUADRADO en $x<-y$

$P_{XY}(\ldots) = 0$ Lo Ate 12 $y^2(1-|y|)\, \mathbb{1}_{(-1,1)}$

$P(x<-y) = P_X(\text{en ese CUADRADO})\, P_Y(\text{en ese CUADRADO}) \neq 0$

c) $12 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-x/2}^{+\infty} x y^2\, \mathbb{I}_{(0,1)}(x)\, \mathbb{I}_{(-x^2,x^2)}(y)\, dy\, dx = 1{,}2$

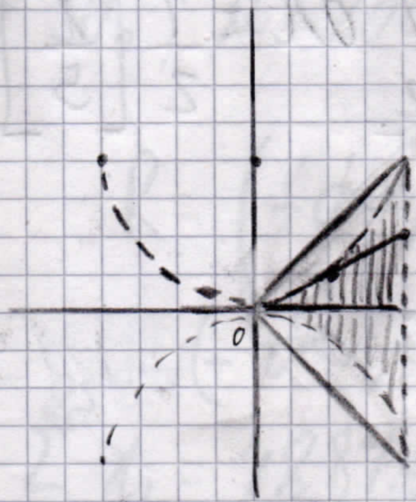
Tenés que calcular $\mathbb{P}(2Y-X>0)$, así que no puede dar más que uno.

(2)

03/07/2014

4. $$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Kxy^2 & 0<x<1,\ |y|<x^2 \\ 0 & cc \end{cases}$$

a)



$$\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} Kxy^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 Kx\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-x^2}^{y=x^2} dx$$

$$= \int_0^1 K\,\frac{2}{3}x^7\,dx = K\left[\frac{1}{12}x^8\right]_0^1$$

$Y = x^2$

$\sqrt{x} =$

$$= K\,\frac{1}{12} \qquad \boxed{K=12}$$

b) $$f_X(x) = 8x^7\ \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

$-1<y<0 \qquad 0<y<1$

$|y|<x<1 \qquad -|y|<x<1$

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{0}\int_{|y|}^{1} 12y^2x\,dx\,dy + \int_0^1\int_{-|y|}^{1} 12y\,x\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{12}{2}\left[x^2\right]_{|y|}^{1} y^2\,dx + \int_0^1 \frac{12}{2}y^2\left[x^2\right]_{-|y|}^{1} dx = 6y^2(1-|y|)\,\mathbb{I}_{(-1,1)}(y)$$

$\sqrt{|y|} = |x|$

X, Y no son indep porque el soporte no es rectángulo ni un cuadrado

c) $P\left(Y > \frac{X}{2}\right) = \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} 12 x y^2 \, dy \, dx$

$= \int_0^1 \frac{4\cancel{12}}{\cancel{3}} x \left[y^3\right]_0^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^1 4x \, \frac{x^3}{\cancel{8}\,2} \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{10}$

(2)

2.

c) i.

$$T = \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

Bajo H_0, $\mu = 200$ $\sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - 200)}{15} \sim N(0,1)$

$$R = \left(-\infty, -z_{\frac{0.05}{2}}\right] \cup \left[z_{\frac{0.05}{2}}, +\infty\right)$$
$$= (-\infty, -1.96] \cup [1.96, +\infty)$$

ii. $\sum_{i=1}^{25} x_i = 4884.56$

$$\frac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{25} = 195.3824$$

$$T_{obs} = 5\frac{(195.3824 - 200)}{15} = -1.53 \notin R$$

No se rechaza H_0

iii. $P^{\mu=198}\left(\left|5\frac{\bar{X}_n - 200}{15}\right| \leq 1.96\right)$

$$P^{\mu=198}\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X}_n - 200}{3} \leq 1.96\right)$$

$$P^{\mu=198}\left(-\frac{97}{75} \leq \frac{\bar{X}_n - 198}{3} \leq \frac{197}{75}\right)$$

$$= \phi(2.63) - \phi(-1.29)$$

$$= -1 + \phi(1.29) + \phi(2.63) = -1 + 0.9015$$

$$+ 0.9957 = 0.8972$$

3. b) $\hat{\theta}_{MV} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (X_i)$

a) $E(X) = \int_0^\theta x \frac{3}{\theta^3} x^2 \, dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^4}{\theta^3}\right]_0^\theta$

$$= \frac{3}{4} \frac{\theta^4}{\cancel{\theta^3}} = \frac{3}{4}\theta$$

$$\hat{\theta}_M = \frac{4}{3} \bar{X}_n$$

(2)

$$E\left(\frac{4}{3}\overline{X}_n\right) = \frac{4}{3}E(\overline{X}_n) = \frac{4}{3}E(X) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\theta = \theta$$

$\hat{\theta}_M$ insesgado e asintóticamente insesgado

Por LGN $\overline{X}_n \xrightarrow{P} E(X) = \frac{3}{4}\theta$

$$\frac{4}{3}\overline{X}_n \xrightarrow{P} \theta$$

$\hat{\theta}_M$ es consistente

c) $IC_{1-\alpha} = \left[\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b\right]$

$a = x_{\frac{\alpha}{2}} \,/\, F_X(x_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

$b = x_{1-\frac{\alpha}{2}} \,/\, F_X(x_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

1. $Y_1, \dots, Y_n$ iid $Y_i \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{10}\right)$ $\forall i,\ 1 \leq i \leq n$

a) $E(Y_i) = 10 < +\infty$, $V(Y_i) = 10^2 < +\infty$

Por el TCL

$$\frac{\overline{Y}_n - E(\overline{Y}_n)}{\sqrt{Var(\overline{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

$$\overline{Y}_{64} = \frac{\sum_{i=1}^{25} Y_i}{25}$$

$$P\left(8 \leq \frac{\sum_{i=1}^{25} Y_i}{25} \leq 12\right) = P\left(\sqrt{64}\left(\frac{8-10}{10}\right) \leq \sqrt{64}\left(\frac{\overline{Y}_{25}-10}{10}\right)\right.$$

$$\left. \leq \sqrt{64}\left(\frac{12-10}{10}\right)\right) \simeq \phi(1.6) - \phi(-1.6)$$

$$= 1 + 2\phi(1.6) = -1 + 2 * 0.9452 = 0.8904$$

b) $P(8 \leq \overline{Y}_n \leq 12) = P(-2 \leq \overline{Y}_n - 10 \leq 2)$

$$= P(|\overline{Y}_n - 10| \leq 2) \underset{\text{Tchebyshev}}{\geq} 1 - \frac{Var(\overline{Y}_n)}{2^2}$$

(2)

$$= 1 - \frac{100}{4n} \geqslant 0.93$$

$$0.07 \geqslant \frac{100}{4n}$$

$$n \geqslant 4 * \frac{100}{0.07}$$

$$n = \underline{5715}$$