1	2	3	4	Calificación
~~B~~ B	M	~~B-~~ B	B	Aprob

Tema 1

APELLIDO Y NOMBRE: NO. DE LIBRETA:

TURNO: CARRERA:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Segundo Cuatrimestre - Primer Parcial - 1/10/2016

---

1. Analizar la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^3-(y+2)^3)}{|y|x^2+(y+2)^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy^2)}{\operatorname{sen}(x^2+y^4)}$

2. Analizar la continuidad de la función f en los puntos de la curva $y=x^2$, donde

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{-y^4}{x^2+e^x y^2} & \text{si } y>x^2 \\ x^2|y| & \text{si } y\le x^2. \end{cases}$$

3. Sea $f(x,y)$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{y\operatorname{sen}(x^3)}{x^6+|\cos(x)|y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Analizar la existencia de $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para cada $v\in\mathbb{R}^2, \|v\|=1$.

b) Decidir si f es diferenciable en $(0,0)$.

4. Sea $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función diferenciable tal que el plano tangente al gráfico de g en el punto $(0,0,g(0,0))$ tiene ecuación $z=1+3x-2y$. Sea $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la función dada por $f(x,y)=(\cos(y)-x, x\operatorname{sen}(y))$. Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de $g\circ f$ en $(1,0,g\circ f(1,0))$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

1° Parcial Análisis I

(1) (a) Veo que por la curva $x=0$ el límite es cero cuando $(x,y)\to(0,-2)$.

$$\lim_{y\to-2} \overbrace{\frac{\operatorname{sen}(-(y+2)^3)}{(y+2)^2}}^{f(x,y)} = \lim_{y\to-2} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(-(y+2)^3)}{(-(y+2)^3)}}_{\text{tiende a 1}} \cdot \frac{(-(y+2)^3)}{(y+2)^2} =$$

$$\lim_{y\to-2} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(-(y+2)^3)}{-(y+2)^3}}_{\text{tiende a 1}} \cdot \underbrace{-(y+2)}_{\text{tiende a 0.}} = 0$$

Ahora, pruebo por ~~"Sándwich"~~ DEFINICIÓN que el límite original es cero. Qvq. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, \text{si } 0<\|(x,y+2)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)|<\varepsilon$.

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen}(3x^3-(y+2)^3)}{|y|x^2+(y+2)^2}\right| \le \frac{|3x^3-(y+2)^3|}{\left||y|x^2+(y+2)^2\right|} \le \frac{3|x|^3}{|y|x^2+(y+2)^2} + \frac{|y+2|^3}{|y|x^2+(y+2)^2} \le$$

el denom. es siempre positivo, dejo de escribir el módulo.

$\cancel{= \frac{3|x|\,x^2}{1}}$

Voy a pedir $\delta<1$. Entonces: $|y+2|<1$

$-1 < y+2 < 1$

$-3 < y < -1$

$1 < |y| < 3$

$$\le \overbrace{\frac{3|x|\,x^2}{x^2+(y+2)^2}}^{\le 1} + \overbrace{\frac{|y+2|\,(y+2)^2}{|y|x^2+(y+2)^2}}^{\le 1} \le 3|x| + |y+2| \le 4\|(x,y+2)\| < 4\delta$$

Basta tomar. $\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$

(b) Veo que por la curva $x=0$, el límite es cero.

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(0 \cdot y^2)}{\operatorname{sen}(0^2+y^4)} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{\operatorname{sen}(y^4)} = 0$$

Ahora, por la curva $y^2 = x^2$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y^2 \cdot y^2)}{\operatorname{sen}(y^4+y^4)} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y^4)}{y^4} \cdot \cancel{y^4} \cdot \frac{2y^4}{\operatorname{sen}(2y^4)\, 2\cancel{y^4}} =$$

$$\lim_{y\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(y^4)}{y^4} \cdot \frac{2y^4}{\operatorname{sen}(2y^4)}}_{\text{tienden a 1.}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como hay dos curvas por las cuales el límite es distinto, no existe el lím. original.

B

③ ⓐ. Calculo las derivadas direccionales en $(0,0)$ por definición.
Sea $v=(v_1,v_2)$ / $\|v\|=1$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}\cdot v_2\cdot \operatorname{sen}(t^3v_1^3)}{\cancel{t}\left(t^6v_1^6+|\cos(t v_1)|\,t^2v_2^2\right)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{v_2\cdot t^{\cancel{3}}v_1^3\cdot \operatorname{sen}(t^3v_1^3)}{\cancel{t^2}\left(t^4v_1^6+|\cos(tv_1)|v_2^2\right)t^3v_1^3}=\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(t^3v_1^3)}{t^3v_1^3}}_{\xrightarrow{t\to 0}\,1}\cdot\frac{v_2v_1^3\cdot t}{t^4v_1^6+|\cos(tv_1)|\,v_2^2}=0$$

Observo en el límite anterior que el denominador no se anula pues las coordenadas v_1, v_2 no son cero al mismo tiempo, ya que $\|v\|=1$.
Todas las derivadas direccionales en $(0,0)$ existen y valen cero. Ojo si $v_2=0$, el denominador tiende a cero

ⓑ $f(0,0)=0$ y por el punto anterior: $f_y(0,0)=0=f_x(0,0)$.
Planteo el límite de la definición de diferenciabilidad.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\operatorname{sen}(x^3)}{\left(x^6+|\cos(x)|y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Para que f sea diferenciable, ese límite debería dar cero. Observo el límite por la curva $y=x^2$.

NOTA

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{(x^6 + |\cos(x)|\, x^4)\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^{\cancel{5}}}{\cancel{x^4}(x^2+|\cos(x)|)\,|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x}{(x^2+|\cos(x)|)\,|x|\sqrt{1+x^2}}$$

Observo el límite cuando $x \to 0^+$.

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3}}_{\xrightarrow{x\to 0^+} 1} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\,(x^2+|\cos(x)|)\sqrt{1+x^2}} = 1$$

Como hay una curva por la cual el límite no es cero, f no es diferenciable en (0,0).

4) Observo que f es diferenciable por ser suma y multiplicación de diferenciables. Como f y g son diferenciables, gof también lo será y el plano será tangente. ~~Por Regla~~ Voy a necesitar $g\circ f(1,0)$, $(g\circ f)_x(1,0)$ y $(g\circ f)_y(1,0)$. Por Regla de la Cadena:

$D g\circ f(1,0) = Dg(f(1,0)) \cdot Df(1,0)$. Obs: $f(1,0) = (0,0)$

Calculo $Dg(0,0)$: Saco información del plano dado.

$z = 1 + 3x - 2y$. $g(0,0) = 1$ $g_y(0,0) = -2$
$g_x(0,0) = 3$

$\nabla g(0,0) = (3,-2)$

Calculo $Df(1,0)$:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & -\operatorname{sen}(y) \\ \operatorname{sen}(y) & x\cdot\cos(y) \end{pmatrix} \text{ y } Df(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volviendo:

$$D\,g\circ f(1,0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Tengo $(g\circ f)_x(1,0)$ y $(g\circ f)_y(1,0)$. Me falta $g\circ f(1,0)$, pero:

~~Pero.~~ $g\circ f(1,0) = g(f(1,0)) = g(0,0) = 1$.

Luego, el plano tangente pedido es de ecuación:

$$z = 1 - 3(x-1) - 2y.$$

B

(2) Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 = b$. Puedo acercarme a (a,b) por curvas que cumplan la ~~[illegible]~~ condición $y > x^2$ o que cumplan $y \leq x^2$. Para analizar la continuidad de f, voy a ver si ~~es~~ el límite es igual a $f(a,b)$.

$f(a,b) = a^2|b|$ pero $a^2 = b$, entonces $f(a,b) = b^2 \times |b|$ 3

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2|y| = a^2|b| = f(a,b).$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{-y^4}{x^2 + e^x y^2} = \frac{-b^4}{a^2 + e^a b^2} \neq a^2|b|$$

¿Por qué?

Luego, el límite es distinto según por qué región me acerque. Por lo tanto, f no es continua en la curva $y = x^2$.