

Álgebra I - Curso de Verano 2018  
Segundo Parcial (13/03/2018)

---

1. Florencia cumple años y compra caramelos para repartir entre sus amigos, sus compañeros de la facultad y sus compañeros de trabajo. En el supermercado venden bolsas de  $C$  caramelos cada una, con  $1 \leq C \leq 500$ .

- De las 4 bolsas que compró para repartir (en partes iguales) entre sus 27 compañeros de trabajo, le sobraron 2 caramelos.
- De las 5 bolsas que compró para repartir (en partes iguales) entre sus 21 amigos, le sobraron 13 caramelos.
- De las 6 bolsas que compró para repartir (en partes iguales) entre sus 35 compañeros de facultad, le sobraron 10 caramelos.

Si Agustín es amigo de Florencia (pero no compañero de trabajo o facultad), ¿cuántos caramelos recibió?

---

2. Hallar **todas** las soluciones  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de la ecuación

$$102x + 222y = 12$$

que cumplen simultáneamente:

$$x + 2y \geq 0 \quad \text{y} \quad 5^{x+2y} \equiv 5 \pmod{19}.$$

---

3. Sea  $w \in \mathbb{C}$  una raíz 18-ava primitiva de la unidad. Probar que el número  $z = w^{16} + \sum_{j=1}^{17} (w^3 \bar{w})^{3j+1}$  es imaginario puro.

---

4. Para cada  $a \in \mathbb{C}$  se define el polinomio  $h = x^{15} - 3x^5 + a \in \mathbb{C}[x]$ .

- a) Hallar **todos** los valores de  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $h$  tiene ~~raíces múltiples~~ *al menos una raíz múltiple*.
  - b) Para cada valor de  $a \in \mathbb{C}$  hallado, calcular **todas** las raíces múltiples de  $h$  y determinar sus multiplicidades.
- 

5. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{C}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$  y  $\mathbb{Q}[x]$  el polinomio

$$f = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32$$

sabiendo que tiene al menos una raíz en común con  $g = x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10$ .

---

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS