Análisis I - Análisis Matemático I - Análisis II (C) - Matemática 1

Exámen Final (16/6/2017)

1	2	3	4

CALIF.

Apellido/s: No. de libreta:
Nombre/s: Carrera:

---

1. a) Enuncie y demuestre el *teorema de Bolzano* sobre ceros de funciones continuas en un intervalo cerrado de la recta real.

   Resolución: Este punto es teórico y pueden verlo en cualquier libro de la materia (o en sus carpetas). Por ejemplo en el de Gabriel Larotonda (teorema 2.3.8). Para usarlo en b), recordemos el enunciado:

   > Si $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ es un función continua, y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

   b) Probar que la ecuación
$$e^x = 1 + 2x$$
tiene una única solución real positiva. Indique un intervalo $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) donde pueda asegurar que la solución está.

   Resolución: Para demostrar la existencia de solución, aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x) = e^x - 1 - 2x$ (que es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que es la resta de la exponencial y un polinomio, que son funciones continuas). Sólo debemos elegir a y b convenientes. Como $e \approx 2,718$, tenemos que

$$f(1) = e - 1 - 2 = e - 3 < 0$$

$$f(2) = e^2 - 5 > 0$$

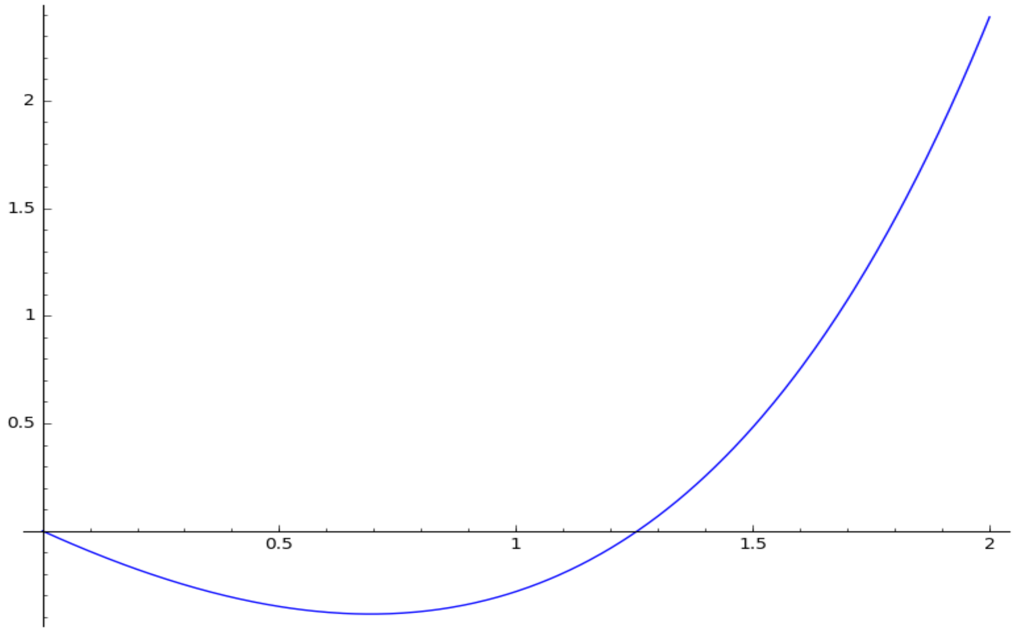
   Por lo tanto, eligiendo $a = 1$ y $b = 2$, concluimos que f tiene al menos un cero (y por lo tanto nuestra ecuación al menos una solución) en el intervalo $[1, 2]$.

   Para probar la unicidad de solución, observemos que la derivada de f es

$$f'(x) = e^x - 2$$

   Dicha derivada sólo se anula en $x_0 = \log(2) \approx 0,69$, siendo negativa si $x < x_0$ y positiva si $x > x_0$. Deducimos que f tiene un mínimo en x_0, siendo estrictamente decreciente en el intervalo $(0, x_0)$ y estrictamente creciente en el intervalo (x_0, ∞). Como $f(0) = 0$, resulta que f es negativa en el intervalo $(0, x_0)$ (en particular no se anula allí); y no puede tener más de un cero en el intervalo (x_0, ∞) pues es estrictamente creciente allí. Concluimos que existe una única solución positiva de nuestra ecuación, y podemos asegurar que está en el intervalo $[1, 2]$.

Podemos verficar que nuestros razonamientos son correctos, haciendo un gráfico de la función f:



.

2. *a*) Pruebe que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $p \in \mathbb{R}^2$, entonces es continua en p.
Resolución: Este punto es teórico y pueden verlo en cualquier libro de la materia (o en sus carpetas). Por ejemplo en el de Gabriel Larotonda (proposición 3.2.4).

b) Dé un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que sea continua en un punto $p \in \mathbb{R}^2$ pero no sea diferenciable en él. Justifique su respuesta.
Resolución: Hay muchos ejemplos posibles, pero uno sencillo es

$$f(x, y) = |x|$$

Esta función es continua en $p = (0, 0)$. Podemos verificarlo, usando la definición: dado $\varepsilon > 0$ elegimos $\delta = \varepsilon$, entonces si

$$\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$$

Tenemos que

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = ||x| - 0| = |x| \leq \|(x, y)\| < \varepsilon.$$

Por lo que f es continua en $p = (0, 0)$ como afirmamos.
Pero f no es diferenciale en $(0, 0)$ ya que la derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

no existe. En efecto, dicha derivada sería por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

y este límite no existe, pues los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

3. Consideramos la $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la integral

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\ dt$$

i) Pruebe que F es una función impar. Es decir: $F(-x) = -F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resolución: Por defināción, tenemos que

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\ dt$$

Haciendo el *cambio de variable* $s = -t$ y usando que el integrando e^{-t^2} es una función par, vemos que:

$$F(-x) = \int_0^x e^{-(-s)^2}\ (-ds) = -\int_0^x e^{-s^2}\ ds = -F(x)$$

ii) Sea $f(x) = F'(x)$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P_{2n}(x)$ el polinomio de Taylor de f de orden $2n$ en un entorno de $x = 0$. Encuentre una fórmula explícita de P_{2n} y pruebe que el correspondiente resto de Taylor R_{2n} satisface que

$$|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(n+1)!}$$

Sugerencia: Aproveche algún desarrollo de Taylor conocido.
Resolución: Por el *teorema fundamental del cálculo*, tenemos que

$$f'(t) = e^{-t^2}$$

Siguiendo la sugerencia, vamos a aprovechar el desarrollo de Taylor de la exponencial, que es

$$e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!} + \widetilde{R}_n(s)$$

(Lo escribimos con la variable s en lugar de x, para que no se nos mezclen las variables en el argumento). Hagamos la sustitución $s = -t^2$. Nos queda:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} \mp \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} + R_{2n}(t) \tag{1}$$

donde

$$R_{2n}(t) = \widetilde{R}_n(-t^2)$$

Para acotar el resto R_{2n} usamos la expersión de Lagrange el resto (proposición 5.1.2 del libro de Gabriel Larotonda) para obtener que:

$$\widetilde{R}_n(s) = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} e^c \quad \text{con } \ c \in (s, 0)$$

y notamos que nuestro s es negativo (o cero si $t = 0$). Entonces $e^c \leq 1$. Y obtenemos que

$$|\widetilde{R}_n(s)| \leq \frac{|s|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Y sustituyendo, s por $-t^2$ obtenemos la cota del enunciado

$$|R_{2n}(t)| \leq \frac{|t|^{2n+2}}{(n+1)!} \tag{2}$$

En definitiva obtuvimos que:

$$P_{2n}(t) = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$$

Notemos que este polinomio debe coincidir con el calculado a partir de las derivas de f, ya que la cota del resto (2) que obtuvimos implica en particular que

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(t) - P_{2n}(t)|}{|t|^{2n}} = 0$$

y el polinomio de Taylor de orden $2n$ es el único polinomio de grado menor o igual que $2n$ con esta propiedad.

iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $Q_{2n+1}(x)$ el polinomio de Taylor de F de orden $2n+1$ en un entorno de $x = 0$. Encuentre una fórmula explícita de Q_{2n+1} y una cota del correspondiente resto.
Sugerencia: Utilice el resultado del ítem anterior.

Resolución: Como F es la integral indefinida de f, para obtener el polinomio de Taylor de F integramos el de f. Explícitamente, integrando la ecuación (1), que podemos escribir como:

$$f(t) = P_{2n}(t) + R_{2n}(t),$$

tenemos que

$$F(x) = Q_{2n+1}(x) + \rho_{2n+1}(x)$$

donde

$$Q_{2n+1} = \int_0^x P_{2n}(t)\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \mp \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}$$

Y el resto es

$$\rho_{2n+1}(x) = \int_0^x R_{2n}(t)\, dt$$

Por lo que integrando la cota que obtuvimos antes, obtenemos que:

$$|\rho_{2n+1}(t)| \le \left| \int_0^x \frac{|t|^{2n+2}}{(n+1)!}\, dt \right| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(n+1)!}$$

Nota: La función de este ejercicio será importante en *Probabilidades y Estadística*. Es, salvo una contante, la *función error* que da el valor del área bajo la curva normal de Gauss. Para saber más sobre esta función, pueden consultar

`https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_error`

4. Calcular la integral triple

$$\int\int\int_D |xyz|\, dx\, dy\, dz$$

sobre la región

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

Resolución: La región D es un cono circular de altura 1, que tiene como base un círculo de radio 1. Utilizamos *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z) para pasar a integrar en la región

$$D^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 1, 0 \le z \le 1 - r\}$$

Entonces la fórmula de cambio de variable y el teorema de Fubini dan que la integral I del ejercicio se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
I = \int\int\int_D |xyz|\, dx\, dy\, dz &= \int\int\int_{D^*} |r \cos\theta \; r \operatorname{sen}\theta \; z| \; r \; dr\, d\theta\, dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{1-r} r^3 |\operatorname{sen}\theta \cos\theta| \; z \; dz \right] d\theta \right] \; dr
\end{aligned}
$$

(¡no olvidar el Jacobiano!). Entonces nos queda

$$I = \left[\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}\theta \cos\theta| \; d\theta \right] \cdot \left[\int_0^1 \frac{1}{2}(1-r)^2 \; r^3 \; dr \right]$$

Para calcular la integral del primer factor, es necesario tener en cuenta que la función $\operatorname{sen}\theta \cos\theta$ es positiva en los intervalos $(0, \frac{\pi}{2})$ y $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$, pero negativa en los intervalos $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ y $(\frac{3}{2}\pi, \pi)$. Luego

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}\theta \cos\theta| \; d\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \; d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \; d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \; d\theta - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \; d\theta$$

Como la primitiva es:

$$\int \operatorname{sen}\theta \cos\theta \; d\theta = -\frac{1}{2}\cos^2\theta + C$$

cada una de las integrales del segundo miembro es $\frac{1}{2}$ y obtenemos que:

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}\theta \cos\theta| \; d\theta = 2$$

La otra integral se calcula fácil porque es la integral de un polinomio

$$\int_0^1 (1-r)^2 r^3 \; dr = \int_0^1 (r^2 - 2r + 1) \; r^3 \; dr = \int_0^1 r^5 - 2r^4 + r^3 \; dr = \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$$

En definitiva:

$$I = \frac{1}{120} \times 2 = \frac{1}{60}$$