Probabilidad y Estadística (Computación) **Examen Final** **16/3/2010**

Nombre y apellido. ....

Número de libreta.

1	2	3	4	Nota
15	25	20	15	75

7 (siete)

Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido.

El examen se aprueba con 50 puntos. Deben resolver al menos uno de los ejercicios 1) y 2) y al menos uno de los ejercicios 3) y 4)

1. *(25 puntos)* Considere un proceso de Poisson de intensidad λ , es decir que el número de ocurrencias del evento en un intervalo de longitud t tiene distribución Poisson de parámetro (λt).

   ? *a)* Demuestre que el tiempo de espera hasta la primera ocurrencia del evento (o, equivalentemente, entre dos eventos sucesivos) tiene distribución exponencial.

   b) El número de automóviles que llegan a un centro de verificación vehicular por hora sigue un proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Sean $T_1, T_2, \ldots$ los tiempos entre las llegadas de los autos, de modo que $T_1 + \cdots + T_n$ es el tiempo de llegada del n–ésimo automóvil.

   1) ¿A qué converge en probabilidad $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$ cuando $n \to \infty$. Justifique.
   2) ¿A qué converge en probabilidad $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$ cuando $n \to \infty$. Justifique.

2. *(25 puntos)* Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional tal que existen y son finitas $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ y $V(Y)$.

   a) Defina la covarianza entre X e Y, $cov(X,Y)$, y el coeficiente de correlación lineal, $\rho(X,Y)$.

   b) Pruebe que si a, b, c y d son constantes, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $cov(a\,X + c, b\,Y + d) = a\,b\,cov(X,Y)$.

   c) Pruebe que si $a\,b > 0$, entonces $\rho(a\,X + c, b\,Y + d) = \rho(X,Y)$. ¿Qué pasa si $a\,b < 0$?

   d) Pruebe que si existen constantes a y c, $a \neq 0$ tales que $Y = a\,X + c$, entonces $|\rho(X,Y)| = 1$. ¿Cuándo es $\rho(X,Y) = 1$? ¿Cuándo es $\rho(X,Y) = -1$?

3. *(25 puntos)* Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con función de densidad dada por:

$$f(x) = \frac{x^3}{6\,\theta^4}\, e^{-\frac{x}{\theta}}\, I_{(0,\infty)}(x) \qquad (\theta > 0),$$

   que verifica $E(X) = 4\,\theta$ y $V(X) = 4\,\theta^2$.

   a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de θ, $\hat{\theta}_1$.

   b) Verifique que el estimador de momentos de θ, $\hat{\theta}_2$, coincide con $\hat{\theta}_1$ y que es consistente.

   c) Sea $\hat{\theta}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$. Pruebe que no es un estimador insesgado de θ^2. ¿Cuál es el sesgo?

   d) Proponga a partir de $\hat{\theta}_3$ un estimador insesgado de θ^2.

4. *(25 puntos)* Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, siendo ambos parámetros desconocidos.

a) Plantee un test de nivel α para las hipótesis

$$H_o : \mu = \mu_o \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_o$$

describiendo claramente el estadístico del test y la región de rechazo.

b) Suponiendo ahora que $\sigma^2 = \sigma_o^2$ es conocido, ¿cómo se modifican el estadístico del test y la correspondiente región de rechazo?

c) Para el test planteado en *b*), halle la función de potencia $\Pi(\mu_1)$.

d) ¿A qué tiende $\Pi(\mu_1)$ cuando $\mu_1 \to \infty$? ¿Y cuando $\mu_1 \to -\infty$?.

e) Dado un valor $\mu_1 \neq \mu_o$ fijo, calcule el límite de $\Pi(\mu_1)$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 1

Defino T: "tiempo de espera hasta la primer ocurrencia"

ⓐ Si $t \leq 0$, $F_T(t) = 0$ (no hay tiempos negativos)

Si $t > 0$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t)$$

$$= 1 - P(X_T = 0)$$

~~Con X_t ~ Poisson~~

Con $X_T \sim P(\lambda)$

$$P(X_t = 0) = \frac{e^{\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} = e^{\lambda t}$$

$$1 - P(X_t = 0) = 1 - e^{\lambda t}$$

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{\lambda t} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Entonces $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$t_1 \dots t_n$ son v.a. i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas)

(b)

(1) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \bar{T}_n \xrightarrow{P} E(t_i) = \dfrac{1}{\lambda}$

Por la Ley de los Grandes Números como son las t_i iid., con un n lo suficientemente grande.

(2) Sabemos que si $g(x)$ es una función continua en a entonces

$g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$ si $X_n \xrightarrow{P} a$

Como $g(x) = x^2$ es continua en $\dfrac{1}{\lambda}$ con $\lambda \neq 0$

Entonces

$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}{n} \xrightarrow{P} \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$

$\left(\dfrac{\sum T_i}{n}\right)^2 \longrightarrow \dfrac{1}{\lambda^2}$ no

Ejercicio 2:

Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional talque existen y son finitos $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ y $V(Y)$

ⓐ $\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$, tambien se puede definir como $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$\rho(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x\,\sigma_y}$ en donde σ_x σ_y son ~~a~~ los desvios standar de X e Y.

ⓑ $\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = E[(aX+b)(cY+d)] - E(aX+b)\,E(cY+d)$

$= E[acXY + adX + bcY + bd] - E(aX+b)\,E(cY+d)$

$= acE(XY) + \cancel{adE(X)} + \cancel{bcE(Y)} + \cancel{bd} - [acE(X)E(Y) + \cancel{adE(X)} + \cancel{bcE(Y)} + \cancel{bd}]$

$= ac\,(E(XY) - E(X)E(Y))$

$= ac \cdot \operatorname{cov}(X,Y)$

(c) Sabemos que $\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$ y $\sigma_{cY+d} = |c|\sigma_Y$

Entonces

$$\rho(aX+b, cY+d) = \frac{cov(aX+b, cY+d)}{\sigma_{aX+b}\,\sigma_{cY+d}}$$

$$= \frac{ac\; cov(X,Y)}{|a||c|\,\sigma_X\,\sigma_Y}$$

Como $ac > 0 \rightarrow ac = |a||c|$

$\rightarrow$ Puedo simplificar y me queda

$$\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \rho(X,Y)$$

Si $ac < 0 \rightarrow \rho(X,Y) = -\rho(X,Y)$

(d) $\rho(X,Y) = \rho(X, aX+b) = \dfrac{cov(X, aX+b)}{\sigma_X\,\sigma_{aX+b}} = \dfrac{E(X(aX+b)) - E(X)E(aX+b)}{|a|\,\sigma_X^2}$

$= \dfrac{E(aX^2+bX) - E(X)(aE(X)+b)}{|a|\,\sigma_X^2} = \dfrac{aE(X^2) + bE(X) - aE(X)^2 - bE(X)}{|a|\,\sigma_X^2}$

Ejercicio 2 (continuación)

$$= \frac{a\left(E(X^2)-E^2(X)\right)}{|a|\,\sigma_x^2} = \frac{a\,\cancel{\sigma_x^2}}{|a|\,\cancel{\sigma_x^2}} = \frac{a}{|a|}$$

Si $a > 0 \rightarrow \rho(X,Y) = 1$

Si $a < 0 \rightarrow \rho(X,Y) = -1$

Ejercicio 3

a) $X_1 - X_n$ v.a. i.i.d.

$$f(x) = \frac{x^3}{6\theta^4} e^{-\frac{x}{\theta}} I_{(0,\infty)}(x)$$

Con $E(x) = 4\theta$ $V(x) = 4\theta^2$

1. Función de densidad conjunta (~~ax~~ veros. – .)

$$\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{6\theta^4} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = L(\theta)$$

Tengo que hallar el máx de la función, esto es lo mismo que obtener el máx del $\ln(L(\theta))$

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} 3\ln(x) - \ln(6\theta^4) - \frac{x}{\theta}$$

Calculo la derivada e igualo a cero para obtener el estimador.

$$\frac{d\ln(L(\theta))}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{24\theta^3}{6\theta^4} + \frac{x}{\theta^2}$$

$$= -\frac{4n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = 0 \rightarrow$$

Igualo a cero

$$\frac{4n}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta^2} \rightarrow \frac{n 4 \theta^2}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\rightarrow 4\theta = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{4n}}$$

ⓒ $\hat{\theta}_3 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$

Para ver que no es insesgado tengo que ver que: $E_\theta(\hat{\theta}) \neq \theta$

$$E_\theta(\hat{\theta}^2) = E_{\theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)}{n} = \frac{n(\theta^2 20)}{n} \quad ⊗$$

Sabemos que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$\rightarrow E(X^2) = V(X) + E(X)^2$

Entonces: $E(X_i^2) = 4\theta^2 + 16\theta^2$

$= \theta^2 20$

En ⊗

$20\theta^2 \neq \theta^2 \longrightarrow$ No es insesgado

Su sesgo es $E_\theta(\hat{\theta}^2) - \theta^2 =$

$20\theta^2 - \theta^2 = 19\theta^2$ sesgo

ⓓ Un estimador insesgado de θ^2 podría ser

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i)}{4n}\right)^2$$

Ya que $E_\theta(\hat{\theta}^2) = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{4n}\right)^2$

$$= \frac{n^2 16\,\theta^2}{n^2 16} = \theta^2$$

Ejercicio 4.

$X_1 \dots X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

ⓐ

$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$\underbrace{T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}}_{\text{Estadístico del test}}$ Donde S^2 es el estimador insesgado de la varianza.

La región de rechazo ~~es~~ : $|T| \geq t_{n-1,\alpha/2}$ ✓

ⓑ Suponiendo que la varianza ahora es conocida

$\sigma^2 = \sigma_0^2$

$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$ La región de rechazo es ahora:

$|T| \geq z_{\alpha/2}$ ✓

ⓒ $\pi(\mu_1) = P_{\mu_1}\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}\right) = 1 - P_{\mu_1}\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\alpha/2}\right)$

$= 1 - P_{\mu_1}\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right)$

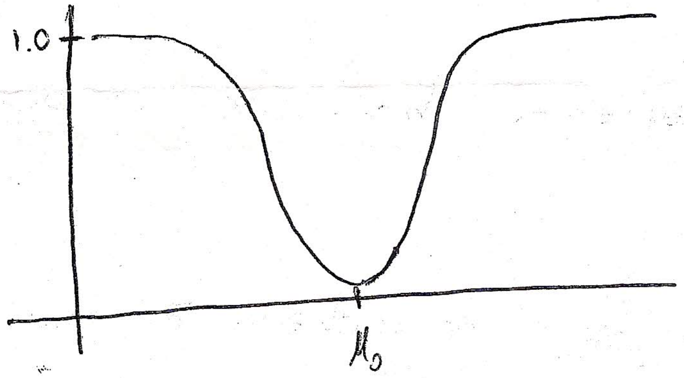
$$= 1 - P_{\mu_1}\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1 - \phi\left(z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) + \phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \quad (*)$$

B

(d) El gráfico de la función π es el siguiente

Aproximadamente



Por lo que cuando ~~tiende~~

$\mu_1 \to \infty$ ó

$\mu_1 \to -\infty$

$\pi(\mu_1) \to 1$

Podías chequearlo en (*)

(e) $\cancel{\pi(\mu_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta = P(\text{error tipo II})}$

No, si $\mu_1 \neq \mu_0$ fijo

$\pi(\mu_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

con $\mu_1 \neq \mu_0$