B 1. El polinomio

$$f = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 23x^3 + 15x^2 - 13x - 5$$

posee una raíz que también es raíz de $g = x^3 - x^2 - 3x - 1$. Encuentre la factorización de f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

B 2. Determine para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(2^{n+1} + 3^n : 3^{n+1} - 2^n) \neq 1$.

B 3. (a) Para cada entero positivo n calcule la suma de los cubos de las raíces n-ésimas de la unidad.

(b) Calcule la suma de los cubos de las raíces 85-avas *primitivas* de la unidad.

B 4. ¿Cuántas formas hay de ordenar las letras de la palabra PERMUTACIONES de manera tal que las vocales aparezcan en orden alfabético?

B 5. Sea X el conjunto $\{1, \ldots, 20\}$, sea $Y = X \times X$ y sea R la relación en Y tal que cada vez que (a, b) y (c, d) son elementos de Y se tiene que

$$(a, b)\ R\ (c, d) \iff ad = bc.$$

Muestre que R es una relación de equivalencia en Y y determine la clase de equivalencia del elemento $(3, 2)$ de Y.

Problema 1

$g = x^3 - x^2 - 3x - 1$

Por el lema de Gauss sus posibles raíces en $\mathbb{Q}$ son ± 1

$g(1) = -4$ y $g(-1) = 0$, luego $(x+1) \mid g$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & & -1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad g = (x+1)\underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{h}$$

Las raíces de h son de la forma $w = \dfrac{2+z}{2}$ con

$z^2 = 4 - 4.1.(-1) = 8$. Luego, hay dos w posibles:

$w_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ y $w_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

$\Rightarrow g = (x+1)(x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2}))$

Evaluemos f en las raíces de g:

$f(-1) = (-1)^7 - 7(-1)^6 + 21(-1)^5 - 35(-1)^4 + 23(-1)^3 + 15(-1)^2 - 13(-1) - 5$
$= -64$

Luego, según la consigna alguna de las dos raíces reales de g debe ser raíz de f. Pero, si una lo es, ambas lo son porque $f \in \mathbb{Q}[x]$.

$\Rightarrow (x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2})) = (x^2 - 2x - 1) \mid f$

Antes de hacer esa división, exploremos las ~~~~ posibles raíces en $\mathbb{Q}$ de f según el Lema de Gauss: $\{\pm 1, \pm 5\}$

Ya vimos $f(-1) \neq 0$, veamos:

$$f(1) = 1^7 - 7 \cdot 1^6 + 21 \cdot 1^5 - 35 \cdot 1^4 + 23 \cdot 1^3 + 15 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 - 5$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ 1 es raíz de f, $(x-1) \mid f$

$$f(5) = 5^7 - 7 \cdot 5^6 + 21 \cdot 5^5 - 35 \cdot 5^4 + 23 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5^2 - 13 \cdot 5 - 5$$
$$= 15680$$

$\Rightarrow$ 5 no es raíz de f

$$f(-5) = (-5)^7 - 7(-5)^6 + 21(-5)^5 - 35 \cdot (-5)^4 + 23 \cdot (-5)^3 + 15(-5)^2 - 13(-5) - 5$$
$$= -277440$$

$\Rightarrow$ -5 no es raíz

Dividamos:

	1	-7	+21	-35	+23	+15	-13	-5
1		1	-6	15	-20	3	18	5
	1	-6	15	-20	3	18	5	$\boxed{0}$

$$\Rightarrow f = (x-1)\underbrace{(x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 3x^2 + 18x + 5)}_{g}$$

Como $(x^2 - 2x - 1) \mid f$, $(x^2 - 2x - 1) \mid g$

$$x^6-6x^5+15x^4-20x^3+3x^2+18x+5 \quad \underline{\left| \, x^2-2x-1 \right.}$$

$$-\ \underline{x^6-2x^5-x^4} \qquad\qquad\qquad\qquad x^4-4x^3+8x^2-8x-5$$

$$-4x^5+16x^4-20x^3+3x^2+18x+5$$

$$-\ \underline{-4x^5+8x^4+4x^3}$$

$$8x^4-24x^3+3x^2+18x+5$$

$$-\ \underline{8x^4-16x^3-8x^2}$$

$$-8x^3+11x^2+18x+5$$

$$-\ \underline{-8x^3+16x^2+8x}$$

$$-5x^2+10x+5$$

$$-\ \underline{-5x^2+10x+5}$$

$$0$$

$$\Rightarrow f=(x-1)\underline{(x^2-2x-1)}(x^4-4x^3+8x^2-8x-5)$$

Pero las raices de podrían ser dobles, chequeemos:

$$x^4-4x^3+8x^2-8x-5 \quad \underline{\left| \, x^2-2x-1 \right.}$$

$$-\ \underline{x^4-2x^3-x^2} \qquad\qquad x^2-2x+5$$

$$-2x^3+9x^2-8x-5$$

$$-\ \underline{-2x^3+4x^2+2x}$$

$$5x^2-10x-5$$

$$-\ \underline{5x^2-10x-5}$$

$$0$$

$$\Rightarrow f=(x-1)(x^2-2x-1)^2\underbrace{(x^2-2x+5)}_{h}$$

Veamos las raices de h:

son de la forma $w = \frac{2+z}{2}$ con $z^2 = 4 - 4.1.5 = -16$

Luego hay dos w posibles:

$$w_1 = 1 + \frac{\sqrt{16}\, i}{2} = 1 + 2i \quad y \quad w_2 = 1 - 2i$$

Por lo tanto la factorización de f en $\mathbb{C}[x]$ es:

$$f = (x-1)\,(x-(1-\sqrt{2}))^2 (x-(1+\sqrt{2}))^2\,(x-(1+2i))\,(x-(1-2i))$$

son todos polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ porque son de grado 1

La factorización de f en $\mathbb{R}[x]$ es:

$$f = (x-1)\,(x-(1-\sqrt{2}))^2\,(x-(1+\sqrt{2}))^2\,(x^2-2x+5)$$

son todos irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ por ser de grado 1 salvo (x^2-2x+5) que es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ porque no tiene raices en $\mathbb{R}$, sus dos raices están en $\mathbb{C}$

Finalmente, la factorización de f en $\mathbb{Q}[x]$ es:

$$f = (x-1)(x^2-2x-1)^2(x^2-2x+5)$$

$(x-1)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ por ser de grado 1 y tanto (x^2-2x-1) como (x^2-2x+5) son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ por no tener raices en $\mathbb{Q}$. El primero tiene sus dos raices en $\mathbb{R}$ y el segundo en $\mathbb{C}$.

Problema 2

$d = (2^{n+1} + 3^n : 3^{n+1} - 2^n)$

$\Rightarrow d \mid 2.2^n + 3^n \quad \wedge \quad d \mid 3.3^n - 2^n$

- $d \mid 2.2^n + 3^n + 2(3.3^n - 2^n)$

  $d \mid 2.2^n + 3^n + 6.3^n - 2.2^n$

  $d \mid 7.3^n$

- $d \mid 3(2.2^n + 3^n) + (-1)(3.3^n - 2^n)$

  $d \mid 6.2^n + 3.3^n - 3.3^n + 2^n$

  $d \mid 7.2^n$

$\Rightarrow d \mid (7.2^n : 7.3^n)$

$d \mid 7(2:3)^n$

$d \mid 7$

$d \in \{1, 7\}$

Veamos para que valores de n, d resulta ser 7.
Para ello evaluamos la congruencia de n (mod 6) pues
como $2 \perp 7$ y $3 \perp 7$, $2^6 \equiv 1 \ (7)$ y $3^6 \equiv 1 \ (7)$

n	0	1	2	3	4	5	(6)
$2^{n+1}+3^n$	3	7	17	43	113	307	
$2^{n+1}+3^n$	3	0	3	1	1	6	(7)
$3^{n+1}-2^n$	2	7	23	73	227	697	
$3^{n+1}-2^n$	2	0	2	3	3	4	(7)

Por lo tanto $d = 7 \iff n \equiv 1\ (6)$, sino $d = 1$.

Sólo con $n \equiv 1\ (6)$, $d \neq 1$

Problema 3

a) $$\sum_{i=0}^{n-1} (w_i)^3 \quad \text{con } w \in G_n$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (w_1^i)^3 = \sum_{i=0}^{n-1} (w_1)^{3i} = \sum_{i=0}^{n-1} (w_3)^i$$

$$= \begin{cases} n \text{ si } w_3 = 1 \\ \dfrac{(w_3)^n - 1}{w_3 - 1} = 0 \text{ si } w_3 \neq 1 \end{cases} \qquad w_3 = w_1^3 \;,\; w_1 = e^{2\pi i/n}$$

~~Pero $w_3 = 1$ sólo en G_3, entonces la sumatoria da 3 para G_3 y 0 para el resto de los G_n~~ $(n \neq 3)$

Pero $w_3 = 1$ sólo en G_3 y G_1, entonces la sumatoria da 1 para G_1, 3 para G_3 y 0 para G_n con $n \neq 1$ y $n \neq 3$

b) $G_n^* = \{ w \in G_n \,/\, w \text{ es raíz primitiva de } G_n \}$

$$G_{85} = G_{85}^* \overset{d}{\cup} G_{17}^* \overset{d}{\cup} G_5^* \overset{d}{\cup} G_1 \quad \text{pues } 85 = 5 \cdot 17$$

$$\sum_{i=0}^{84} (w_i)^3 = 0 \quad \text{con } w \in G_{85} \text{ por (a)}$$

$$\sum_{i=0}^{0} (w_i)^3 = 1 \quad \text{con } w \in G_1 \text{ por (a)}$$

En gral, salvo G_1 y G_3, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (w_i)^3 = \sum_{i=0}^{n-1} w_i = 0$

17 y 5 son primos luego en G_5 y G_{17} todas las raices salvo W_0 son primitivas

$$\sum_{i=0}^{n-1} (w_i)^3 \quad \text{con } w \in G_5$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (w_3)^i = (w_3)^0 + (w_3)^1 + (w_3)^2 + (w_3)^3 + (w_3)^4 = 0$$

(a)

$$= w_0 + w_3 + w_6 + w_9 + w_{12} = 0$$

$$= w_0 + w_3 + w_1 + w_4 + w_2 = 0$$

$$= 1 + w_3 + w_1 + w_4 + w_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}_{} = -1$$

$$\text{Primitivas de } G_5 = \sum_{n=1}^{n-1} w_i = \sum_{n=1}^{n-1} (w_3)^i$$

Lo mismo sucede para G_{17}, como W_3 es primitiva tengo la suma de todas las raices de G_{17} que es igual a 0. Como $W_0 = 1$ la única raiz no primitiva, la suma de las primitivas da -1

Como $G_{85} = G_{85}^* \overset{d}{\cup} G_{17}^* \overset{d}{\cup} G_5^* \overset{d}{\cup} G_1$

$$\sum_{w \in G_{85}} w^3 = \sum_{w \in G_{85}^*} w^3 + \sum_{w \in G_{17}^*} w^3 + \sum_{w \in G_5^*} w^3 + \sum_{w \in G_1} w^3$$

$$0 = \sum_{w \in G_{85}^*} w^3 + (-1) + (-1) + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{w \in G_{85}^*} w^3 = 1$$

Problema 4

PERMUTACIONES Tiene 13 letras y 6 vocales.

Hay sólo una forma de ordenar las vocales en orden alfabético: A E E I O U.

- Puedo elegir los 6 lugares donde ponerlas, hay $\binom{13}{6}$ formas

Por ej: _A_E_E_IOU___

Quedan 7 lugares para 7 consonantes distintas: P, R, M, T, C, N y S. Luego, hay 7! formas de colocarlas por cada selección de lugares para vocales.
Por lo tanto, hay en total $\binom{13}{6} \cdot 7! = 8648640$ formas de ordenamiento posibles

- Alternativamente, puedo elegir los 7 lugares para las consonantes(*), dejando sólo una forma posible de poner las vocales en los 6 lugares restantes.
(*) de los 13 totales

Esto da $\frac{13!}{(13-7)!} = 8648640$ formas posibles, como se esperaba por la forma de contar anterior

Problema 5

- $(a,b)\ R\ (a,b) \quad \forall\ (a,b) \in Y$

  Pues implica $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ que se cumple para todo $(a,b) \in Y$

  Luego R es reflexiva

- $(a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

  $\Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow (c,d)\ R\ (a,b) \quad \forall (a,b), (c,d) \in Y$

  Es decir que $(a,b)\ R\ (c,d) \Rightarrow (c,d)\ R\ (a,b)$, por lo tanto R es simétrica

- $$\left.\begin{array}{l} (a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ (c,d)\ R\ (e,f) \Leftrightarrow cf = ed \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \end{array}\right\} \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \Rightarrow \circledast$$

  $\circledast\ (a,b)\ R\ (e,f)$

  Por lo tanto $(a,b)\ R\ (c,d) \wedge (c,d)\ R\ (e,f) \Rightarrow (a,b)\ R\ (e,f)$ para cualquier $(a,b), (c,d), (e,f)$ pertenecientes a Y y la relación es transitiva

Dado que R es reflexiva, simétrica y transitiva, es una relación de equivalencia

Veamos la clase de equivalencia de $(3,2)$

$(3,2)\ R\ (a,b) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{b}$

~~Como $a, b \in A =$~~

Como $a, b \in X = \{1, \dots, 20\}$

$$\frac{a}{b} \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{6}{4}; \frac{9}{6}; \frac{12}{8}; \frac{15}{10}; \frac{18}{12} \right\}$$

y entonces $\overline{(3,2)} = \{(3,2); (6,4); (9,6); (12,8), (15,10); (18,12)\}$