PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
Examen Final
13/03/07

Apellido y Nombre	
N° L.U.	
e-mail	
Carrera	
Nro. hojas entregadas	

El examen final se aprueba con 50 puntos.
Enuncie las propiedades que utiliza.

Ejercicio 1 *(25 puntos)*. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional tal que existen y son finitas $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ y $V(Y)$.

a) Defina la covarianza entre X e Y, $\text{cov}(X,Y)$ y el coeficiente de correlación lineal, $\rho(X,Y)$.

b) Pruebe que si a, b, c y d son constantes, a y c distintas de cero,

$$\text{cov}(aX+b, cY+d) = a\,c\,\text{cov}(X,Y)$$

c) Pruebe que si el producto $a \cdot c$ es mayor que 0, entonces

$$\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$$

¿Qué pasa si $a \cdot c < 0$?.

d) Pruebe que si $Y = aX + b$, entonces $|\rho(X,Y)| = 1$. ¿Cuándo es $\rho(X,Y) = 1$? ¿Cuándo es $\rho(X,Y) = -1$?

$\rho(aX+b,$
$\rho(X, a\cdot X+b)$
2\|12
signo(a) $\rho(X,X)$
1

Ejercicio 2 *(25 puntos)*. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias i.i.d con densidad dada por

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} I_{(0,\theta)}(x) \qquad (\theta > 0)$$

9 a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de θ.

8 b) ¿ Demuestre que la distribución de $T = \dfrac{\max_{1\le i\le n}(X_i)}{\theta}$ no depende del parámetro θ.

8 c) Halle un intervalo de confianza para θ de nivel exacto 1-α.

Ejercicio 3 *(25 puntos)*. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocido. Se desea testear las hipótesis

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu > \mu_0$$

a) Deduzca un test de nivel α para este problema y pruebe que el test propuesto tiene el nivel deseado.

b) Deduzca la función de potencia y exprésela en términos de una función de distribución conocida. Estudie su monotonía y grafíquela.
c) Justifique por qué el test planteado en a) también es adecuado para testear las hipótesis

$$Ho: \mu \leq \mu_o \quad \text{vs} \quad H1: \mu > \mu_o$$

Ejercicio 4 *(25 puntos)*. a) Explicite las condiciones que debe satisfacer el experimento asociado a la distribución geométrica y defina la variable aleatoria geométrica *X*.
b) Explicite el rango de *X* y deduzca su función de probabilidad puntual y su función de distribución acumulada.
c) Halle la esperanza y la varianza de la v.a. *X*.
d) Enuncie y demuestre la propiedad de falta de memoria de la distribución geométrica.

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
Examen Final
14/08/07

Apellido y Nombre	
N° L.U.	
e-mail	
Carrera	
Nro. hojas entregadas	

El examen final se aprueba con 50 puntos.
Enuncie las propiedades que utiliza.

Ejercicio 1 *(25 puntos).* a) Enuncie y demuestre la desigualdad de Tchebycheff.

b) Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números.

c) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con $\mu=E(X_i)$ y $\sigma^2=Var(X_i)$ Demuestre que $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ es un estimador consistente de μ.

d) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i)= \sigma_i^2$. Demuestre que si $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \to 0$, entonces $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ es un estimador consistente de μ.

Ejercicio 2 *(25 puntos).* Sea $X \sim E(\lambda)$.

a) Deduzca la función de distribución acumulada de X y su función generadora de momentos. Calcule su esperanza y su varianza.

b) Pruebe que X posee la propiedad de falta de memoria.

c) Sea Y_t un proceso de Poisson de parámetro λ, es decir que Y_t mide la cantidad de veces que ocurre un evento en un intervalo de longitud *t*. Demuestre que la v.a. T = *tiempo de espera hasta la primera ocurrencia* tiene distribución exponencial de parámetro λ.

Ejercicio 3 *(25 puntos).* Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. de una distribución con densidad

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

siendo $\theta > -1$.

a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de $1/(\theta + 1)$

b) Sea $Y = -\ln(X)$, donde X es una v.a. cuya densidad es la dada anteriormente. Halle la densidad de la v.a. Y. ¿A qué familia pertenece esta distribución?

c) ¿Es el estimador hallado en a) insesgado?. Justifique.

d) ¿Es el estimador hallado en a) consistente. Justifique.

Ejercicio 4. (25 puntos). Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución Bi(1, p), n grande. Suponga que se desea realizar un test de hipótesis para testear

$$H_o: p = p_o \qquad \text{vs} \qquad H_1: p < p_o$$

a) Deduzca un test de nivel α aproximado para decidir entre las dos hipótesis. Pruebe que el test tiene el nivel deseado.

b) Calcule la función de potencia del test planteado en a) para todo p_1 en el intervalo (0,1) y aproxímela por alguna función de distribución conocida.

c) La proporción de obesos en una población es del 30 %. La Secretaría de Salud realizó una campaña contra la obesidad y desea saber si tuvo éxito. Para ello, transcurrido un largo periodo, realiza una encuesta entre 100 personas de las cuales 25 resultan ser obesas. Si se quiere que la probabilidad de decidir que la proporción de obesos disminuyó cuando en realidad no es así sea 0.05

   i) Explicite H_o y H_1. Proponga un test para este problema y compute el p-valor. Qué decisión toma?

   ii) Calcule la función de potencia en p=0.20.

$\leq 1 - \Phi(\tau_{obs}.$ $\qquad \bar{X} \to E()$

$\geq F$ $\qquad \bar{X} \to \mu_p$

$X_i \sim Bi$ $\qquad 1-\bar{X} \to 1-p.$

$\sum X_i \sim Bi(n,p)$ $\qquad \bar{X}(1-\bar{X}) \to p(1-p)$

$\bar{X}$ $\qquad P$

$$\sqrt{n}\,.\,\frac{\bar{X}-\mu_p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Sea S el estimador cte de σ

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Examen Final

07/08/07

Apellido y Nombre	
N° L.U.	
e-mail	
Carrera	
Nro. hojas entregadas	

El examen final se aprueba con 50 puntos.
Enuncie las propiedades que utiliza.

Ejercicio 1 *(25 puntos)*. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional tal que existen y son finitas $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ y $V(Y)$.

a) Defina la covarianza entre X e Y, $\text{cov}(X,Y)$ y el coeficiente de correlación lineal, $\rho(X,Y)$.

b) Pruebe que si a, b, c y d son constantes, a y b distintas de cero,

$$\text{cov}(aX+b, cY+d) = a\,c\,\text{cov}(X,Y)$$

c) Pruebe que si $a\,c > 0$ entonces

$$\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$$

¿Qué pasa si $a\,c < 0$?.

d) Pruebe que si $Y = aX + b,$ entonces $|\rho(X,Y)| = 1$. ¿Cuándo es $\rho(X,Y) = 1$? ¿Cuándo es $\rho(X,Y) = -1$?

Ejercicio 2 *(25 puntos)*. Sea S un espacio muestral.

a) Defina independencia de dos sucesos A y B.

b) Demuestre que si A es independiente de sí mismo, entonces P(A) = 0 ó P(A) = 1.

c) Demuestre que $\varnothing$ y A son independientes, cualquiera sea el evento A.

d) Demuestre que S y A son independientes, cualquiera sea el evento A.

e) ¿Cómo se define la independencia de 3 sucesos: A, B y C?

Ejercicio 3 *(25 puntos)*. Sean $X_1, X_2,...,X_n$ variables aleatorias con distribución $N(\mu, \sigma_o^2)$, con σ_0^2 conocido. Se desea testear

$$H_o: \mu = \mu_o \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu > \mu_o$$

a) Deduzca un test de nivel α para este problema y verifique que el test propuesto tiene el nivel deseado.

b) Deduzca la función de potencia y exprésela en términos de una función de distribución conocida. Estudie su monotonía y grafíquela.

c) Justifique porqué el test planteado en a) también es adecuado para testear las hipótesis:

$$Ho: \mu \leq \mu_o \quad \text{vs} \quad H1: \mu > \mu_o$$

Ejercicio 4 *(25 puntos)*. Sean $X_1, X_2,\ldots,X_n$ variables aleatorias con distribución U(0,θ) siendo θ > 0.

a) Halle el estimador de momentos de θ. Llamémoslo $\hat{\theta}_M$.

b) Halle el estimador de máxima verosimilitud de θ. Llamémoslo $\hat{\theta}_{MV}$.

c) ¿Son los estimadores hallados en a) y b) insesgados?

d) En base al criterio del menor error cuadrático medio, ¿cuál de los dos estimadores elegiría?

---

qvq: $Cov(aX+b, cY+d) = a.c\ cov(x,y)$

$E([ax+b]\times[cY+d]) - E(ax+b).E(cY+d) = E(acXY + aXd + bcY + bd) - [aE(x)+b].[cE(Y)+d] =$

$= acE(x.X) + adE(x) + bcE(Y) + bd - (acE(x).E(Y) + aE(x)d + bcE(y) + bd) = ac\,E(X,Y) - ac\,E(x).E(y)$

$= a\,c\,cov(x,y)$

$E(x+y) = \sum_y\sum_x (x+y)\ p_{xy}(x,y) =$ $\quad P_{xy}(x,y)$ puntual.

$= \sum_{x\in B_x}\sum_{y\in B_y} x\,p_{xy}(x,y) + y\,p_{xy}(x,y) = \sum_{x\in B_x}\underbrace{\sum_{y\in B_y} x\,p_{xy}(x,y)}_{p_x(x)} + \sum_{y\in B_y}\sum_{x\in B_x} y\,p_{xy}(x,y) = \sum_{x\in B_x} x.p_x(x) + \sum_{y\in B_y} y\,p_y(y) =$

$= E(x) + E(y)$

$x \sim Bi(m,p)$ $\quad p_x(k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$

$E(X) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!}.i\ p^i(1-p)^{m-i} = \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{(i-1)!(m-i)!} p^i(1-p) = mp\sum_{i=0}^{m}\frac{(m-1)!}{(i-1)!(m-i)!} p^i(1-p)^{m-i} =$

$=$

original

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
Examen Final
20/07/07

Apellido y Nombre	
N° L.U.	
e-mail	
Carrera	
Nro. hojas entregadas	

El examen final se aprueba con 50 puntos.
Enuncie las propiedades que utiliza.

Ejercicio 1 *(25 puntos)*. a) ¿Qué se entiende por partición de un espacio muestral S? Defina claramente.

b) Enuncie y demuestre el Teorema de la Probabilidad Total.

c) Enuncie y demuestre el Teorema de Bayes.

d) Una fábrica posee dos máquinas para producir cierto tipo de piezas para telares industriales. La máquina 1 produce piezas cuya longitud (en cm.) es una variable aleatoria con distribución U(0.7,1.3) mientras que para la máquina 2 la longitud de cada pieza es una variable aleatoria con distribución N(1,1). Las piezas producidas por las dos máquinas se mezclan en la línea de producción. Se sabe que la máquina 2 produce el doble de piezas que la máquina 1.

i. Si se elige una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su longitud sea mayor de 1.1 cm?
ii. Dado que una pieza elegida al azar mide más de 1.1 cm, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina A?

Ejercicio 2 *(25 puntos)*. a) Sea X una v.a. con distribución $N(\mu,\sigma^2)$, y sean a y b números reales, $a \neq 0$, pruebe que

$$aX + b \sim N\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$$

b) Deduzca que si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

c) Usando que $E(Z) = 0$ y $V(Z) = 1$, demuestre que $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$.

d) Demuestre que si x_p es el cuantil p de la distribución de X, $0 < p < 1$ y z_p es el cuantil de la distribución Normal standard, entonces:

$$x_p = \sigma z_p + \mu$$

Ejercicio 3 *(25 puntos)*. Sea $X_1,\dots,X_n$ una muestra aleatoria de una variable con función de densidad:

$$f(x,\beta)=\left(\frac{x}{\beta}\right)e^{-\frac{x^2}{2\beta}}I_{(0,\infty)}(x) \quad \text{para } \beta>0$$

a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de β.

b) Sea T un estimador del parámetro θ basado en una muestra tamaño n. ¿Qué quiere decir que T es un estimador insesgado de θ? ¿Y qué significa que T sea consistente?.

c) ¿Es el estimador hallado en a) insesgado? **Justifique.**

d) ¿Es el estimador hallado en a) consistente? **Justifique.**

(**Ayuda**: considere la distribución de X^2)

Ejercicio 4 *(25 puntos)*. Supongamos que $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias i.i.d. con distribución E(λ). Cada una mide el tiempo de vida (medido en meses) de un dispositivo electrónico en n pruebas independientes.

a) Deducir un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para el tiempo medio de vida basado en la muestra. Justificar detalladamente.

b) Sea p la probabilidad de que el tiempo de vida sea superior a un mes. Proponer un intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)$ para p basado en la muestra anterior.

c) Si para una muestra determinada y un nivel igual a 0.99 el intervalo hallado en b) fuese (0.4560009,0.7624104), ¿qué decisión tomaría al testear las siguientes hipótesis?

$$H_0: p = 1/2 \quad \text{vs} \quad H_1: p \neq 1/2$$

¿Con qué nivel tomaría su decisión? ¿Es exacto o aproximado?

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (Computadores)

EXAMEN FINAL 19/07/02

Ejercicio 1 (25 puntos): Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad dada por

$$f(x,\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} I_{(1,\infty)}(x) \qquad \text{con} \quad \theta > 0$$

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de $1/\theta$.
b) ¿Es el estimador hallado en a) insesgado?. Justifique.
c) ¿Es el estimador hallado en a) consistente?. Justifique.
Sugerencia: halle la distribución de la v.a. $\ln(X)$.

Ejercicio 2 (25 puntos): a) Enuncie y demuestre el Teorema de la Probabilidad Total.

b) Una fábrica produce dos tipos distintos de arandelas de metal: A y B. Las áreas de las arandelas (en mm^2) son variables aleatorias X_A y X_B con distribución N (25,4) (media 25 y varianza 4) y U(20,32), respectivamente. Se sabe que se producen 3 arandelas de tipo A por cada arandela de tipo B. Si se elige una arandela al azar de la producción total, calcule la probabilidad de que su área sea mayor que 27.5 mm^2.

c) Se eligen arandelas en forma independiente. Calcule la probabilidad de que sea necesario elegir exactamente 6 arandelas hasta obtener 1 arandela de área mayor que 27.5 mm^2. ¿Qué distribución utilizó y porqué?

d) Se eligen arandelas en forma independiente. Calcule la probabilidad de que sea necesario elegir exactamente 10 arandelas hasta obtener 5 arandelas de área mayor que 27.5 mm^2. ¿Qué distribución utilizó y porqué?

Ejercicio 3 (30 puntos): El supervisor de un gran distrito escolar piensa que el número de maestros ausentes en cualquier día dado son vs. as. independientes con distribución Poisson. Para verificar ésto toma una muestra aleatoria de 50 días y registra el número de maestros ausentes, obtieniendo los siguientes datos:

Nro. de ausencias	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	1	4	8	10	8	7	5	3	2	1	1

a) Calcule un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para la media de ausencias en base a los datos obtenidos por el supervisor.

b) El supervisor supone que la media de número de docentes ausentes en un día cualquiera es mayor que 3.5, que era el promedio histórico.
   i) Proponga un test de nivel asintótico α para decidir si su afirmación es verdadera.
   ii) Calcule el p-valor.
   iii) Qué conclusión se obtiene si el test se realiza a nivel 0.05? Y a nivel 0.01?

c) Considere el test planteado en b) con nivel 0.05.
   i) Deduzca la función de potencia de este test.
   ii) Calcule la potencia del test para el caso en que la media del número de ausentes del distrito sea 4.
   iii) Calcule el tamaño de muestra necesario para tener una potencia de por lo menos 0.80 para el caso en que la media del número de ausentes en un día en el distrito sea 4.

Ejercicio 4 (20 puntos): Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral Ω, tales que $P(B) > 0$.

a) Defina la probabilidad condicional $P(A/B)$

b) Demuestre que
   i) $P(\Omega / B) = 1$
   ii) $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$
   iii) si A y C son excluyentes ($A \cap C = \emptyset$), entonces $P(A \cup C / B) = P(A/B)+P(C/B)$
   iv) Si A y C son sucesos cualesquiera, $P(A \cup C / B) = P(A/B)+P(C/B) - P((A \cap C)/B)$

FINAL ESTADISTICA
5/8/03

Ejercicio 1

a) Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pruebe que $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ también es normal e identifique los parámetros de la distribución de Y

b) Sea $Z \sim N(0,1)$. Pruebe que si $W = Z^2$, entonces W tiene distribución χ^2

Identifique los parámetros de la distribución de W

Ejercicio 2

a) Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución $E(\lambda)$. Halle el estimador de máxima verosimilitud de λ.

b) Deduzca un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para λ. Justifique.

c) En las mismas condiciones anteriores, suponga que lo que interesa es estimar $P(X_1 \leq 1)$. Proponga un estimador, justificando su elección, y un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para $P(X_1 \leq 1)$. Justifique.

$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

Ejercicio 3 Demuestre las siguientes propiedades:

a) Si X e Y son v.a. independientes con distribución de Poisson de parámetro λ, μ respectivamente, entonces $X+Y$ tiene distribución $P(\lambda+\mu)$

b) bajo las mismas hipótesis de a), $X \mid X+Y=k$ tiene distribución $Bi\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

Ejercicio 4 Sea $X_1, \ldots X_n$ una muestra aleatoria con distribución $Bi(1, p)$ siendo n grande.

Suponga que desea realizar un test de hipótesis para testear

$$H_0: p = p_0 \quad vs \quad H_1: p > p_0$$

lugarchazo@hotmail.com
[illegible]

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA ©

Final 18/07/03

Apellido	
Nombre	
N° L.U.	
Hojas Entregadas	
Carrera	
e-mail	

Por favor: Resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere y firme todas las hojas.

El examen final se aprueba con 50 puntos.

Ejercicio	Puntaje	Nota
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
Total	100	

Ejercicio 1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $P(\lambda)$ y n grande.

a) Deduzca un intervalo de confianza de nivel aproximado $1-\alpha$ para λ basado en la muestra aleatoria.

b) El número de tareas que llegan por minuto a la cola de un sistema tiene distribución de Poisson de parámetro λ. En 40 instantes no solapados, de un minuto de duración cada uno, se observa el número de tareas que llegan a la cola y se observa un promedio muestral de 2 tareas por minuto. Halle un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para λ.

c) Se desea estimar la probabilidad de que en un minuto llegue al menos una tarea al sistema. ¿Cómo estimaría esta probabilidad en base a la información dada? Halle un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para estimar la probabilidad deseada. **Justifique**.

Ejercicio 2. (25 puntos)

a) Enuncie la desigualdad de Tchebycheff y demuéstrela para el caso continuo.

b) Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números.

c) Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con la función de densidad $f_X(x)$ dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} I_{(0,\infty)}(x)$$

Sea Y_n una nueva sucesión de variables aleatorias definida por

$$Y_n = \frac{1+\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Pruebe que Y_n converge en probabilidad a β cuando n tiende a infinito. Justifique.

Ejercicio 3. (25 puntos).

a) Sean X e Y v.a. cualesquiera y a y b constantes reales. Pruebe que

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov(X,Y).$$

b) Sean $X_1, X_2,...,X_n$ v.a. cualesquiera con $E(X_i)=\mu_i$ y $V(X_i)=\sigma^2_i$ y $a_1, ..., a_n$ constantes. Deduzca expresiones para $E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)$ y $V(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)$.

c) Sean $X_1, X_2,...,X_n$ v.a. cualesquiera con $E(X_i)=\mu$ y $V(X_i)=\sigma^2$. Pruebe que $E(\overline{X})=\mu$ y $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$.

Ejercicio 4. (25 puntos). Sean $X_1, X_2,...,X_n$ variables aleatorias con distribución N(μ, σ²), con σ²conocido. Se desea testear las hipótesis

$$Ho: \mu = \mu_o \quad \text{vs.} \quad H1: \mu > \mu_o$$

a) Deduzca un test de nivel α para este problema y pruebe que el test propuesto tiene el nivel deseado.

b) Deduzca la función de potencia y exprésela en términos de una función de distribución conocida. Estudie su monotonía y grafíquela.

c) Justifique por qué el test planteado en a) también es adecuado para testear las hipótesis

$$Ho: \mu \leq \mu_o \quad \text{vs} \quad H1: \mu > \mu_o$$

cov (xy) = E(xy) − E(x) E(y)

a^2 V(x) + b^2 V(y) + 2ab [E(xy) − E(x) E(y)]

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(30/12/03)

NOMBRE Y APELLIDO:
N° DE LIBRETA: N° DE HOJAS ENTREGADAS:
e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIAR LAS PROPIEDADES QUE SE UTILIZAN

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

---

1. **(25 puntos)**

   (a) Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar su función generadora de momentos, su esperanza y su varianza.

   (b) Sean $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ variables aleatorias independientes. Deduzca la distribución de $X+Y$. ¿Es alguna distribución conocida?

2. **(25 puntos)**

   (a) Probar que si F es una función de distribución acumulada continua y estrictamente creciente y $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, entonces la variable aleatoria $Y = F^{-1}(U)$ tiene a F como función de distribución acumulada.

   (b) Dada la función de densidad:

   $$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha}} \, \mathcal{I}_{(0,\infty)}(x)$$

   ¿Cómo podría generar una variable aleatoria con esta densidad a partir de una variable aleatoria uniforme? Justifique detalladamente.

3. **(25 puntos)** Sean T_n y W_n dos estimadores insesgados del parámetro θ

   (a) Si estos estimadores se combinan para formar un nuevo estimador dado por

   $$\widehat{\theta}_n = \alpha T_n + \beta W_n$$

   donde α y β son constantes. ¿Qué condiciones deben cumplir α y β para que $\widehat{\theta}_n$ sea insesgado?

   (b) Si T_n y W_n son independientes y tienen varianza $V(T_n)$ y $V(W_n)$, respectivamente, calcular la varianza de $\widehat{\theta}_n$.

(c) Bajo las condiciones de b), ¿cuál es la elección de α y β que minimiza la varianza de $\widehat{\theta}_n$ y que a la vez hace que el estimador sea insesgado?

4. **(25 puntos)**

(a) Enuncie el Teorema Central del Límite.

(b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $Bi(1,p)$ y n suficientemente grande. Deducir un intervalo de confianza de nivel aproximado $1-\alpha$ para p.

(c) Se llama *chance* al cociente $c(p) = \dfrac{p}{1-p}$ que mide cuánto más frecuentes son los éxitos que los fracasos.

i. Probar que si $p > q$, entonces $g(p) > g(q)$. (A mayor probabilidad de éxito, mayor chance).

ii. Hallar un intervalo de confianza de nivel aproximado $1-\alpha$ para $\theta = \dfrac{p}{1-p}$.

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(19/12/03)

NOMBRE Y APELLIDO:
N° DE LIBRETA: N° DE HOJAS ENTREGADAS:
e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIAR LAS PROPIEDADES QUE SE UTILIZAN

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

---

1. **(25 puntos)**

   (a) Enunciar y probar el Teorema de Probabilidad Total.

   (b) Dar un ejemplo de aplicación del Teorema.

   (c) Sean A y B eventos de un espacio muestral S. Definir el concepto de independencia entre A y B. Probar que si A y B son independientes, entonces también lo son A y B^c.

2. **(25 puntos)**

   (a) Sea X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Hallar su función generadora de momentos, su esperanza y su varianza.

   (b) Sean $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ variables aleatorias independientes. Deduzca la distribución de $X + Y$. ¿Es alguna distribución conocida?

3. **(25 puntos)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $N(2, \sigma^2)$.

   (a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de σ^2. Llamar $\hat{\sigma}^2$ al estimador obtenido.

   (b) ¿Qué distribución tiene el estadístico $T = \dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$? Justificar. SUGERENCIA: recordar que si $Z \sim N(0,1)$ entonces $Z^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   (c) Hallar el error cuadrático medio de $\hat{\sigma}^2$.

   (d) Si tuviese que elegir entre $\hat{\sigma}^2$ y $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ para estimar σ^2, ¿cuál elegiría? Justificar.

4. **(25 puntos)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $B(1,p)$. n sufic. grai dē

(a) Suponga que se desea realizar un test de hipótesis para testear

$$H_o : p = \frac{1}{4} \quad vs \quad H_1 : p > \frac{1}{4}.$$

Proponga un test de nivel aproximado α para decidir entre la dos hipótesis y muestre que el test propuesto tiene el nivel deseado.

(b) Calcular aproximadamente la probabilidad de no rechazar H_o cuando en realidad $p = \frac{1}{3}$.

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(12/12/03)

NOMBRE Y APELLIDO:
N° DE LIBRETA: N° DE HOJAS ENTREGADAS:
e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIE LAS PROPIEDADES QUE UTILIZA

---

1. **(25 puntos)**

   (a) Sea X una variable aleatoria con distribución $G(p)$. Halle la esperanza de X.

   (b) Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución $G(p)$. Deduzca la distribución de $X+Y$. ¿Es alguna distribución conocida?

   (c) Sea W una variable con distribución $BN(2,p)$. Deduzca la esperanza de W.

2. **(25 puntos)** Sean $X_1,\ldots,X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

   (a) Deduzca un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para el parámetro λ.

   (b) En las mismas condiciones anteriores, suponga que lo que interesa es estimar $P(X_1 \geq 2)$. Proponga un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para $P(X_1 \geq 2)$. Justifique.

3. **(25 puntos)**

   (a) Enuncie y demuestre la desigualdad de Tchebycheff.

   (b) Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números.

   (c) Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. de variables aleatorias tales que $P(X_i = 1) = p$ y $P(X_i = 0) = 1-p$, siendo $p \in (0,1)$ un valor desconocido. Sean $S_n = X_1+\cdots+X_n$ y $t > 0$. Cuán grande debe ser n para que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq 0.01$$

   independientemente del valor de p (desconocido)?

X v.a.

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

4. **(25 puntos)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $N(\mu, \sigma_o^2)$, con σ_o^2 conocida.

(a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de μ. Llame $\widehat{\mu}$ al estimador obtenido. ¿Cuál es la distribución de $\widehat{\mu}$? Justifique.

(b) Suponga que se desea realizar un test de hipótesis para testear

$$H_o : \mu = \mu_o \quad vs \quad H_1 : \mu > \mu_o.$$

Proponga un test de nivel exacto α para decidir entre la dos hipótesis y muestre que el test propuesto tiene el nivel deseado.

(c) Sea $\mu_1 > \mu_o$ un valor fijo. Calcule la probabilidad de no rechazar H_o cuando en realidad $\mu = \mu_1$ y exprésela en términos de alguna función de distribución conocida.

(d) ¿Cuál es el límite de la probabilidad calculada en b) cuando $\mu_1 \to \infty$?