7 (siete)

ANALISIS I - ANALISIS MATEMATICO I - MATEMATICA I

EXAMEN FINAL - 12 / 02 / 2010

NOMBRE: LU:

B

1. Sea f de clase C^k en el intervalo $(a-r, a+r)$. Si P_k es el polinomio de Taylor de orden k de f en a, probar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_k(x)}{(x-a)^k} = 0.$$

$\lim_{x \to a} \frac{f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)}{k!} = 0$

B-

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $p \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable en p. Probar que existe una bola $B \subset A$ centrada en p y una constante $C > 0$ tales que para cada $x \in B$,

$$|f(x) - f(p)| \leq C\|x - p\|.$$

M

3. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a $[0,1]$, y $f : I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable y convexa (cóncava hacia arriba), tal que $f(0) = f(1)$. Probar que f tiene un mínimo absoluto en el interior de $[0,1]$.

B

4. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ una bola abierta y $f : B \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sean p y q dos puntos de B tales que $f(p) = f(q)$. Probar que existe un punto c en el segmento que une p y q, $c \neq p$ y $c \neq q$, tal que $\nabla f(c)$ es perpendicular a $p - q$.

$f(x)$; $g(x)$ derivables en ~~dominio~~ $(x;a)$

1) Regla de L'Hospital: Si f y $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ $\forall x \neq a$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Supongamos ~~$\$$~~ $H(x) = f(x) - P(x)$ y $D(x) = (x-a)^K$ $\lim_{x \to a} \frac{H(x)}{D(x)} = 0/0$ indet.

La derivada de $(x-a)^K$ no se anula si $x \neq a$ (salvo que derivemos $K+1$ veces)

Por el teorema de Taylor y como f es C^K (esto implica diferenciabilidad); $\lim_{x \to a} f(x) - P(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} (x-a)^K = 0$ me queda indeterminación

Ahora observemos que $\lim_{x \to a} \frac{(f(x)-P(x))'}{((x-a)^K)'} = 0/0$ indet. pero si

derivo K veces ambos (esto es posible porque f es C^K y su polinomio tmb es K veces derivable) observamos:

$(f(x) - P(x))^K = f^K(x) - P^K(x)$

$(x-a)^K = K!(x)$; ahora, como f es C^K y por el teorema de Taylor $P_a^K(x) \underset{x \to a}{\to} f^K(x)$ tengo que

$$\lim_{x \to a} \frac{f^K(x) - P_K^K(x)}{K!(x)} = \frac{0}{K!a} = 0$$

$\square$

2- Como f es diferenciable en p ; f es continua en p.

~~Como f es continua en p~~

$$\frac{|f(x)-f(p)-(\nabla f(p) \cdot (x-p))|}{\|x-p\|} \leq \omega \quad \omega \geq 0$$ en el entorno de una

bola con centro en p y radio $< r$ (como f es diferenciable; el plano que aproxima a f está cerca de f en un entorno de p)

por las propiedades de la norma;

$$\left|\frac{f(x)-f(p)}{\|x-p\|} - \frac{\|\nabla f(p)\|\,\|x-p\|\cos\theta}{\|x-p\|}\right| = \left|\frac{f(x)-f(p)}{\|x-p\|} - \|\nabla f(p)\|\cos\theta\right|$$

abrí el módulo

$$-\omega \leq \frac{f(x)-f(p)}{\|x-p\|} - \|\nabla f(p)\|\cos\theta \leq \omega$$

$-\omega - \|\nabla f(p)\| \cos\theta$

$$\leq -\omega + \|\nabla f(p)\|\cos\theta \leq \frac{f(x)-f(p)}{\|x-p\|} \leq \omega + \|\nabla f(p)\|\cos\theta \leq \omega + \|\nabla f(p)\|$$

$$\cancel{|-\omega + \|\nabla f(p)\|\cos\theta|} \leq \frac{|f(x)-f(p)|}{\|x-p\|} \leq |\omega + \|\nabla f(p)\||$$

como $\|x-p\| > 0$; lo paso multiplicando.

$$|-\omega + \|\nabla f(p)\|\cos\theta|\,\|x-p\| \leq |f(x)-f(p)| \leq \omega + \|\nabla f(p)\| \cdot \|x-p\|$$

como f es diferenciable en $x=p$; $\|\nabla f(p)\|$ es un número y

$|\omega + \|\nabla f(p)\|| = \epsilon$

$\square$

4) Teorema de Lagrange en ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$):

~~Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable~~ Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y
Sea B una bola contenida en A tal que $f: \underset{\subset B}{B} \to \mathbb{R}$ es diferenciable; entonces si tomamos 2 puntos; p y q tal que el segmento que los une esté contenido en B; se puede afirmar:

$$f(p) - f(q) = \langle \nabla f(c); (p-q) \rangle$$ con algun c contenido en el segmento.

$f(p) - f(q) = \langle \nabla f(c); (p-q) \rangle = 0$

$f(p) - f(q) = \|\nabla f(c)\| \, \|p-q\| \cos\theta = 0$ donde θ es el angulo entre los vectores $\nabla f(c)$ y $p-q$. Y $\cos 90° = 0$.

$\square$