Apellido, Nombre:
Carrera:

Número de libreta ó DNI:
Turno de Práctica:

---

**Álgebra I**

Primer Cuatrimestre 2023 - Recuperación del Segundo Parcial - 25/7/2023

---

**Escribir con tinta y con letra clara. Usar hojas separadas para ejercicios distintos. No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.**

---

Ejercicio 1. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left(\left(\frac{-9-9i}{2}\right)4i\right)^{61n^2+59}$$

sea un número real positivo.

---

Ejercicio 2. a) Hallar, si existe, un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumpla simultáneamente:

- $\sqrt{3}$ es raíz doble de $f$,
- $(X^2+4) \mid (f : f')$,
- $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}\big((-5X^3-6)^3 + 125X^9 + X^8 - 2X\big)$.

b) ¿Cuál es el máximo común divisor $(f : f')$?

---

Ejercicio 3) Hallar los posibles restos de dividir a $n \in \mathbb{N}$ por 68 sabiendo que

$$\left(n^{832} + 17n + 390 : 1156\right) = 4$$

---

Ejercicio 4. a) Hallar $c \in \mathbb{R}$ tal que $w = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ sea raíz del polinomio

$$f = X^6 - X^5 + X^4 + 81X^2 - 81X + c$$

b) Para el valor de c hallado, factorizar $f$ como producto de irreducibles en $\mathbb{R}[X]$ sabiendo que no tiene raíces racionales.

Ejercicio 1. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left(\left(\frac{-9-9i}{2}\right)4i\right)^{61n^2+59} \Rightarrow \arg = 0$$

sea un número real positivo.

PASO TODO A FORMA EXPONENCIAL:

$$\left[-\frac{9}{2}\cdot(1+i)\cdot 4i\right]^{61n^2+59} = \left[-\frac{9}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot 4\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}\right]^{61n^2+59} = \left[-18\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}\right]^{61n^2+59}$$

$$= \left[18\sqrt{2}\cdot \underbrace{e^{\pi i}\cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}}_{e^{\frac{7}{4}\pi i}}\right]^{61n^2+59} = \left(18\sqrt{2}\right)^{61n^2+59}\cdot e^{\boxed{\frac{7}{4}\pi\cdot(61n^2+59)}\,i} \quad = 0 + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}\cancel{\pi}\cdot(61n^2+59) = 2k\cancel{\pi} \Leftrightarrow 7(61n^2+59) \equiv 0\ (8) \Leftrightarrow (-1)\cdot(-3n^2-5) \equiv 0\ (8)$$

$$\Leftrightarrow 3n^2+5 \equiv 0\ (8) \Leftrightarrow 3n^2 \equiv 3\ (8) \Leftrightarrow \boxed{n^2 \equiv 1\ (8)}$$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 |

**RESPUESTA:**
n=1,3,5 o 7 (mod 8)
Estos son los impares, se puede simplificar la escritura a: n=1 (mod 2)

a)

**Ejercicio 2.** a) Hallar, si existe, un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumpla simultáneamente:

$\sqrt{3}$ es raíz doble

$(X^2-3)^2 \mid f$

- $\sqrt{3}$ es raíz doble de $f$,
- $(X^2+4) \mid (f : f')$,
- $gr(f) = gr((-5X^3-6)^3 + 125X^9 + X^8 - 2X)$.

b) ¿Cuál es el máximo común divisor $(f : f')$?

$\rightarrow 2i$, $-2i$ } raíces dobles. $\left( \begin{array}{l} (X^2+4)^2 \mid f \\ (X^2+4)^3 \nmid f \end{array} \right)$

HAGAMOS LA CUENTA:

$$(-5X^3-6)^3 = (-5X^3)^3 + 3\cdot(-5X^3)^2\cdot(-6) + 3\cdot(-5X^3)\cdot(-6)^2 + (-6)^3$$

$$(-5X^3-6)^3 = -125X^9 - 450X^6 - 540X^3 - 216$$

ENTONCES:

$$gr(f) = gr(X^8 - 450X^6 - 540X^3 - 2X - 216) = 8$$

Teniendo todo en cuenta, concluímos que:

$$f = a\cdot(X^2-3)^2\cdot(X^2+4)^2,\ a \in \mathbb{Q}.$$

Podemos tomar el más simple: a=1

$$\boxed{f = (X^2-3)^2\cdot(X^2+4)^2}$$

b) $f' = 2(X^2-3)\cdot 2X\cdot(X^2+4)^2 + (X^2-3)^2\cdot 2\cdot(X^2+4)\cdot 2X = 4X(X^2-3)(X^2+4)\cdot[X^2+4+X^2-3]$

$$\boxed{f' = 4X\cdot(X^2-3)\cdot(X^2+4)\cdot(2X^2+1)}$$

$$\therefore \boxed{(f : f') = (X^2-3)(X^2+4)}$$

Ejercicio 3) Hallar los posibles restos de dividir a $n \in \mathbb{N}$ por 68 sabiendo que

$$\left(n^{832} + 17n + 390 : \underbrace{1156}_{*}\right) = 4 \iff \boxed{4 \mid n^{832} + 17n + 390} \quad \boxed{17 \nmid n^{832} + 17n + 390}$$

$$\begin{array}{r|l} 1156 & 2 \\ 578 & 2 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$1156 = 2^2 \cdot 17^2$

(MOD 4)

| $n$ | $0^{\times}$ | 1 | 2 | $3^{\times}$ |
|---|---|---|---|---|
| $n^{832}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $17n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $n^{832}+17n+390$ | $2^{\times}$ | 0 | 0 | $2^{\times}$ |

$\boxed{n \equiv 1\ (4) \text{ o } n \equiv 2\ (4)}$

- Si $17 \mid n \Rightarrow n^{832} + 17n + 390 \equiv 16\ (17)$ ✓
- Si $17 \nmid n$, POR P.t.F.:

$n^{832} + 17n + 390 \equiv n^{16 \cdot (832)} + 0 + 16 \equiv 1 + 16 \equiv 0\ (17)$ X

$\boxed{n \equiv 0\ (17)}$

**Cuántos restos posibles mod 68 me quedan que cumplen estas condiciones?**

**Aplico TCR y me quedan n=17(68) o n=34(68)**

Ejercicio 4. a) Hallar $c \in \mathbb{R}$ tal que $w = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ sea raíz del polinomio

$$f = X^6 - X^5 + X^4 + 81X^2 - 81X + c$$

b) Para el valor de c hallado, factorizar $f$ como producto de irreducibles en $\mathbb{R}[X]$ sabiendo que no tiene raíces racionales.

a) $f\left(e^{\frac{1}{3}\pi i}\right) = e^{2\pi i} - e^{\frac{5}{3}\pi i} + e^{\frac{4}{3}\pi i} + 81 e^{\frac{2}{3}\pi i} - 81 e^{\frac{1}{3}\pi i} + C = 0$

$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 81\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 81\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + C = 0$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{81}{2} + \frac{81}{2}\sqrt{3}i - \frac{81}{2} - \frac{81}{2}\sqrt{3}i + C = 0$

$C = \frac{81}{2} + \frac{81}{2}$

$\boxed{C = 81}$

Ejercicio 4. a) Hallar $c \in \mathbb{R}$ tal que $w = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ sea raíz del polinomio

$$f = X^6 - X^5 + X^4 + 81X^2 - 81X + c$$

b) Para el valor de c hallado, factorizar $f$ como producto de irreducibles en $\mathbb{R}[X]$ sabiendo que no tiene raíces racionales.

b) $\boxed{C = 81}$ : $f = X^6 - X^5 + X^4 + 81X^2 - 81X + 81$

DE a) TENEMOS $e^{\frac{1}{3}\pi i}$ COMO RAÍZ $\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ TAMBIÉN LA ES.

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$f \in \mathbb{Q}[X]$

$$\left(X - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \boxed{X^2 - X + 1} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} X^6 - X^5 + X^4 + 81X^2 - 81X + 81 & X^2 - X + 1 \\ \hline -\;X^6 - X^5 + X^4 & \boxed{X^4 + 81} \\ \quad 81X^2 - 81X + 81 & \\ -\;81X^2 - 81X + 81 & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$f = (X^2 - X + 1)(X^4 + 81) \rightarrow$ VEAMOS SI PUEDO REDUCIRLO:

Irreducible en R[x] dado que sus raíces no son reales

$X^4 = -81 \Rightarrow |x|^4 \cdot e^{4\arg(x) i} = 81 e^{\pi i}$

$(x^2-x+1)\,(x^4+81) \to$ VEAMOS SI PUEDO REDUCIRLO:

$1 \,|\, 81x^2 - 81x + 81$

$0 \; 1$

le en R[x] dado que sus
o son reales

$x^4 = -81 \Rightarrow |x|^4 \cdot e^{4\arg(x) i} = 81 e^{\pi i}$

$\Rightarrow \boxed{|x| = 3}$ y $\boxed{\arg(x) = \frac{\pi + 2k\pi}{4}}$

$\arg(x) \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\}$

$x_1 = 3e^{\frac{\pi}{4} i} = 3\left(+\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$x_2 = 3e^{\frac{3}{4}\pi i} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$x_3 = 3e^{\frac{5}{4}\pi i} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$x_4 = 3e^{\frac{7}{4}\pi i} = 3\left(+\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

CONJUGADOS:

$(x - x_1)(x - x_4) = (x^2 - 3\sqrt{2}x + 9)$

CONJUGADOS:

$(x - x_2)(x - x_3) = (x^2 + 3\sqrt{2}x + 9)$

$$\therefore f = (x^2 - x + 1)(x^2 - 3\sqrt{2}x + 9)(x^2 + 3\sqrt{2}x + 9)$$

**Irreducibles en R[x] dado que sus raíces no son reales**