1)a) Para que sea una clase de equivalencia, la relacion tiene que cumplir que sea reflexiva, simetrica y transitiva, veamos:

Reflexiva: $\forall a \in A\ {}_a\Re_a \iff$ a$^{24}a^{66} \equiv 1(11)$

$a^{24}a^{66} \equiv 1(11) \iff a^{90} \equiv 1(11)$, como a es coprimo con 11, entonces por el pequeño teorema de Fermat sabemos que $a^{10} \equiv 1(11)$. Entonces cumple.

Simetrica:

$\forall a, b \in A\ {}_a\Re_b \Rightarrow_b \Re_a$ Veamos si cumple que $a^{24}b^{66} \equiv 1(11) \Rightarrow$b$^{24}a^{66} \equiv 1(11)$ Por fermat, tenemos que $a^4b^6 \equiv 1(11)$ como a y b son coprimos con 11, entoces multiplico a ambos lados por a^6b^4, quedando $a^4b^6a^4b^6 \equiv a^4b^6(11)$ que es igual a $a^{10}b^{10} \equiv a^4b^6(11)$. Por fermat tenemos que $a^{10}b^{10} \equiv 1(11)$ entonces cumple lo que queriamos probar.

Transitiva:

Si $a^4b^6 \equiv 1(11)$ y $b^4c^6 \equiv 1(11) \Rightarrow$a$^4c^6 \equiv 1(11)$ Multiplico a ambos lados de la primera ecuaciones por b^4c^6 quedando $a^4b^4b^6c^6 \equiv b^4c^6(11)$, quedando $a^4c^6 \equiv 1(11)$ como queriamos ver.

b)

Veamos la clase de equivalencia del 2, tenemos que $2^{24}b^{66} \equiv 1(11)$ $5b^6 \equiv 1(11)$. Multiplico por 9 a ambos lados entonces tengo que b$^6 \equiv 1(11)$. Hago una tabla de restos de b^6 con 11, se puede ver que los unicos que cumplen son 2 y 9.

2)Como el MCD de ambos es 419! sabemos que 419! $| \ n$ y 419! $| \ m$. Por algoritmo de division sabemos que 419!*k=n y 419!*l=m con k y l $\in Z$. Reemplazando se tiene que 419!*k*419!*l=419!*419!*420. Tenemos que contar la cantidad de combinaciones de k y l coprimos (para no romper el MCD) para que multipliquen 420. 420 se puede descomponer en 1*3*4*5*7, entonces hay que contar la cantidad de forma de distrubuir esos numeros entre k y l, que son 16.

3) 22a+26b= 14 11a+13b = 7 y

5a+7c=6. Como 91=13*7, entonces si re-escribimos las ecuaciones como 11a=7-13b y 5a=-7c + 6, nos queda que $11a \equiv 7(13)$ y $5a \equiv 6(7)$. Resolviendo nos queda el siguiente sistema

$$\begin{cases} a \equiv 4(7) \\ a \equiv 3(13) \end{cases} \tag{1}$$

Que por TCR nos queda que $a \equiv 81(91)$

4) Si vemos los primeros 8 terminos de la sumatoria, vemos que $w^3 + w^9 + w^{27} + w^{40} + w^{38} + w^{32} + w^{14} + w^1$ (despues de hacer las congruencias correspondientes), es decir, lo interesante es ver que $3^8 \equiv 1(41)$, entonces se puede ver que tenemos un patron ciclico cada 8 terminos. Ahora bien, sabemos que la parte imaginaria de un numero es $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$. En este caso nos queda que $z - \bar{z} = 0$.

$$\sum_{i=1}^{800} \bar{w}^{3^k} = \bar{w}^3+\bar{w}^9+\bar{w}^{27}+\bar{w}^{40}+\bar{w}^{38}+\bar{w}^{32}+\bar{w}^{14}+\bar{w}^1+... = w^{38}+w^{32}+w^{14}+w^1+w^3+w^9+w^{27}+w^{40}+...$$

Entonces, como los terminos de ambas sumatorias son ciclicos, tenemos 100 bloques exactos de repeticion donde aparecen los mismos terminos en cada ciclo, entonces al producirse la resta, el resultado es 0 ya que cada bloque se resta con el otro

5) Desarrolando los terminos, se puede conjeturar que 1 es raiz de multiplicidad 2 para todo n. Aplicando induccion global (es obvio que vale para el caso base) se tiene que $P_n = (x+1)(x-1)^2 * p(x) + (x-1)^2 * (x-1)^2 * q(x)$, siendo p(x)*(x-1)^2 =P$_{n-1}$ y q(x)*(x-1)^2 =P$_{n-2}$. Sacnado factor comun, $P_n = (x-1)^2((x+1) * p(x) + (x-1)^2 * q(x))$. Ahora, como (x+1)*p(x) no tiene a 1 como raiz, entonces la suma no puede producir otra raiz para agregar a la multiplicidad de 1, entonces P_n es raiz de multiplicidad 2.