Hojas: 4
(sin contar ésta)

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	B	10 (diez)

APELLIDO, NOMBRE: [redacted]
CARRERA: LIC. CS. COMPUTACIÓN

NÚMERO DE LIBRETA Ó DNI: [redacted]
TURNO DE PRÁCTICA: [redacted]

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2023 - Recuperación del Segundo Parcial - 25/7/2023

Escribir con tinta y con letra clara. Usar hojas separadas para ejercicios distintos. No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.

Ejercicio 1. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left(\left(\frac{-9-9i}{2}\right)4i\right)^{61n^2+59}$$

sea un número real positivo.

Ejercicio 2. a) Hallar, si existe, un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumpla simultáneamente:

- $\sqrt{3}$ es raíz doble de f,
- $(X^2+4) \mid (f : f')$,
- $\operatorname{gr}(f) = \operatorname{gr}\big((-5X^3-6)^3 + 125X^9 + X^8 - 2X\big)$.

b) ¿Cuál es el máximo común divisor $(f : f')$?

Ejercicio 3) Hallar los posibles restos de dividir a $n \in \mathbb{N}$ por 68 sabiendo que

$$\left(n^{832} + 17n + 390 : 1156\right) = 4$$

Ejercicio 4. a) Hallar $c \in \mathbb{R}$ tal que $w = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ sea raíz del polinomio

$$f = X^6 - X^5 + X^4 + 81X^2 - 81X + c$$

b) Para el valor de c hallado, factorizar f como producto de irreducibles en $\mathbb{R}[X]$ sabiendo que no tiene raíces racionales.

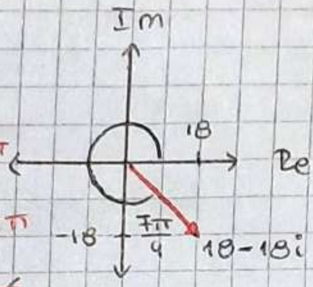
n tq:

1) $\left(\left(\frac{-9-9i}{2}\right)4i\right)^{61n^2+59} \in \mathbb{R}_{>0}$

Sol:

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = \left(\left(-\frac{9-9i}{2}\right)4i\right)^{61n^2+59}$. $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \arg(z) = 0$.

$z = \left(-18i + 18\right)^{61n^2+59}$. Calculo el $\arg(z)$



$\arg(z) = (61n^2+59) \cdot \arg(+18-18i) = 0 + 2k\pi$

$= (61n^2+59) \cdot \frac{7\pi}{4} = 0 + 2k\pi$

$= \frac{427}{4}n^2\cancel{\pi} + \frac{413}{4}\cancel{\pi} = 0 + 2k\cancel{\pi}$

$= \cancel{4}\left(\frac{427}{\cancel{4}}n^2 + \frac{413}{\cancel{4}}\right) = 2k \cdot 4$

$= 427n^2 + 413 = 8k \iff 427n^2 + 413 \equiv 0 \mod 8$

$\iff 3n^2 + 5 \equiv 0 \ (8) \iff 3n^2 \equiv 3 \ (8)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$3n^2$	0	3	4	3	0	3	3	3

→ post: esto está mal

Luego, se cumple que $z \in \mathbb{R}_{>0}$ para $n \equiv x \mod 8$ con $x \in \{1, 3, 5, \cancel{6}, 7\}$

2) a- Hallar $f \in \mathbb{Q}[x]$ / (i) $\sqrt{3}$ es raíz doble
(ii) $(x^2+4) \mid (f:f')$
(iii) $gr\, f = gr((-5x^3-6)^3+125x^9+x^8-2x)$

De (i): $(x-\sqrt{3})^2 \mid f$. También sé que $(x+\sqrt{3})^2 \mid f$ pues $-\sqrt{3}$ es el conjugado de $\sqrt{3}$.

De (ii): las raíces de x^2+4 son dobles (al menos) en f.

De (iii): $deg((-5x^3-6)^3+125x^9+x^8+..) = 8 = deg(f)$ (queda $\begin{array}{r} -125x^9 \\ +125x^9 \\ \hline 0 \end{array}$ y el grado queda 8)

$\Rightarrow (x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x^2+4)^2$, cuyo grado es 8.

Luego, para que $f \in \mathbb{Q}[x]$, agrupo $(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2$

$= (x^2-2\sqrt{3}x+3)(x^2+2\sqrt{3}x+3)$

$= x^4 + \cancel{2\sqrt{3}x^3} + 3x^2 \cancel{-2\sqrt{3}x^3} - 12x^2 \cancel{-6\sqrt{3}x} + 3x^2 \cancel{+6\sqrt{3}x} + 9$

$= x^4 + 3x^2 - 12x^2 + 3x^2 + 9 = x^4 - 6x + 9$.

Rta a) $\Rightarrow f = (x^2+4)^2(x^4-6x+9) \in \mathbb{Q}[x]$ cumple todo lo pedido

b) $(f:f') = ?$

Será el polinomio cuyas raíces son dobles en f

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+4)$ divide a $(f:f')$

PORQUE QUEDÓ MEDIO DESPROLIJO: ACÁ AFIRMO QUE $(x-3)(x+3)(x^2+4)$

Rta b) luego, $(f:f') = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+4)$

3) $(n^{832}+17n+390 : 1156)=4$. Hallar $r_{68}(n)$ con $n\in\mathbb{N}$

CA

1156	2
578	2
289	17
17	17
1	

Sol:

$$(\overbrace{n^{832}+17n+390}^{x} : 2^2\cdot 17^2)=4 \iff 2^2 \mid x \wedge 17\nmid x$$

$$\iff n^{832}+17n+390\equiv 0 \ (4)$$

$$\iff n^{832}+n+2\equiv 0 \ (4)$$

Euler-Fermat
Sea p primo, pto
sea $a\in\mathbb{Z}$:
$a^{p(p-1)}\equiv 1 \ (p^2)$

Si $4\mid n$, tenemos que $0^{832}+0+2\equiv 2\not\equiv 0 \ (4)$. Luego, $4\nmid n$.

Como $4\nmid n$, y $4=2^2$, uso el teorema de Euler-Fermat, y tengo que:

$$n^{4\cdot 3}\equiv 1 \ (4). \text{ Luego, } n^{832}\equiv n^{r_{12}(832)}\equiv n^4 \ (4)$$

$$n^4+n+2\equiv 0 \ (4)$$

n	0	1	2	3
n^4+n+2		0	0	2

no ocurre pues $4\nmid n$

$$\iff n\equiv 1 \ (4) \text{ ó } n\equiv 2 \ (4)$$

Ahora hay que probar que $17\nmid x$.

Como $17\mid 17n$, $17\nmid x \iff 17\nmid n^{832} \vee \underbrace{17\nmid 390}_{\text{es cierto.}}$. Veámoslo:

$$n^{832}+17n+390\equiv 0 \ (17)$$

$$\iff n^{832}+0n+16\equiv 0 \ (17) \iff n^{832}\equiv 1 \ (17)$$

Si $17\mid n$, $n^{832}\equiv 0\not\equiv 1 \ (17)$. Luego, se cumple que $17\nmid x$

Como 17 primo, y supongo ahora que $17\nmid n$, uso PTF: $n^{832}\equiv n^{r_{16}(832)}\equiv n^0\equiv 1 \ (17)$

Luego, $n^{832}+16\equiv 1+16\equiv 0 \ (17)$. Luego, $17\mid n$ es el único caso posible.

Tengo dos sistemas de ecuaciones:

$S_1: \begin{cases} n\equiv 1 \ (4) \\ n\equiv 0 \ (17)\end{cases}$

$n=17k$, $k\in\mathbb{Z}$
$\Rightarrow 17k\equiv 1 \ (4)$
$\iff k\equiv 1 \ (4)$
$\iff k=4q+1$, $q\in\mathbb{Z}$.
$n=17(4q+1)$
$=68q+\boxed{17}$

$S_2: \begin{cases} n\equiv 2 \ (4) \\ n\equiv 0 \ (17)\end{cases}$

$n=17k$, $k\in\mathbb{Z}$
$17k\equiv 2 \ (4) \iff k\equiv 2 \ (4)$
$\iff k=4q+2$ $q\in\mathbb{Z}$
$n=17(4q+2)$
$=68q+\boxed{34}$

Como $4\nmid 17$, por TCR sé que existe una única solución entre 0 y $4\cdot 17=68$.

Rta: Los posibles restos de $r_{68}(n)$ son 17 y 34.

NOTA

4) a) Hallar $c \in \mathbb{R}$ / $w = e^{\pi/3 i}$ es raíz de $f = x^6 - x^5 + x^4 + 81x^2 - 81x + c$

$$f(w) = e^{\frac{6\pi}{3}i} - e^{\frac{5\pi}{3}i} + e^{\frac{4\pi}{3}i} + 81 e^{\frac{2\pi}{3}i} - 81 e^{\frac{\pi}{3}i} + c = 0$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 81\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 81\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c = 0$$

$$= 1 \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}i} - \frac{81}{2} \cancel{+\frac{81\sqrt{3}}{2}i} - \frac{81}{2} \cancel{-\frac{81\sqrt{3}}{2}} + c = 0$$

Rta a) $c = 81.$

Nota: Pasé los $e^{\alpha i}$ a forma binomial usando $|w|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$

b) Factorizar en $\mathbb{R}[x]$ si f no tiene raíces racionales.

Sé que w es raíz. También sé que $\overline{w} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es raíz.

$$\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \mid f$$

$$= (x^2 - x + 1) \mid f$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^6} \cancel{- x^5} \cancel{+ x^4} + 81x^2 - 81x + 81 & x^2 - x + 1 \\ -(\cancel{x^6} \cancel{- x^5} \cancel{+ x^4}) & \overline{x^4 + 81} \\ \quad 81x^2 - 81x + 81 & \\ -(81x^2 - 81x + 81) & \\ \quad \boxed{0} & \end{array}$$

$$\Rightarrow f = (x^2 - x + 1)(x^4 + 81)$$

Busco las raíces de $x^4 + 81$:

$$x^4 + 81 = 0 \iff x^4 = -81 \iff \begin{cases} |x|^4 = 81 \\ \arg(x) = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \end{cases}$$

Luego, $|x| = 3$.

$\arg(x) = \frac{\pi + 2k\pi}{4}$ con $0 \leq k \leq 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

$x_0 = 3e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = 3e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = 3e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x_3 = 3e^{\frac{7\pi}{4}i} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Como estas $x \notin \mathbb{R}$, los agrupo (atrás)

→ sigue atrás

$x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

$x_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

$x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

$x_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

agrupo

$$\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i\right)\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i\right)$$

$$x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} x \cancel{+ \frac{3\sqrt{2}}{2} i x} - \frac{3\sqrt{2}}{2} x + \frac{9}{2} \cancel{- \frac{9}{2} i} \cancel{- \frac{3\sqrt{2}}{2} i x} \cancel{+ \frac{9}{2} i} + \frac{9}{2}$$

$$= x^2 - \cancel{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}} x + 9 = x^2 - 3\sqrt{2} x + 9.$$

$$\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i\right)\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i\right)$$

$$= x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} x \cancel{+ \frac{3\sqrt{2}}{2} i x} + \frac{3\sqrt{2}}{2} x + \frac{9}{2} \cancel{+ \frac{9}{2} i} \cancel{- \frac{3\sqrt{2}}{2} i x} \cancel{+ \frac{9}{2} i} + \frac{9}{2}$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} + 9 = x^2 + 3\sqrt{2} + 9.$$

Luego, la fact. queda:

$$f = (x^2 + 3\sqrt{2} + 9)(x^2 - 3\sqrt{2} + 9)(x^2 - x + 1)$$

ninguno tiene raíces reales y son de grado 2.

B