1	2	3	4
24	25	25	24

10 (diez)

98

Probabilidades y Estadística (C)
Examen Final
(20/02/07)

Nombre y Apellido: Hernán Rodriguez Urtz
N° de libreta: 668/99 N° de hojas entregadas: 5
e-mail: Herudu@hotmail.com

El examen final se aprueba con 50 puntos

Enuncie las propiedades que utiliza

1. **(25 puntos)** Sean X e Y v.a. independientes con distribución Geométrica de parámetro p.

   (a) Halle la distribución de la v.a. $X + Y$.

   (b) Halle $P(X = k|X + Y = n)$. ¿ Para qué valores de n y k está definida esta probabilidad?.

   (c) Pruebe la propiedad de falta de memoria de la distribución geométrica, es decir: Si X tiene distribución Geométrica de parámetro p, entonces

$$P(X > s + t|X > s) = P(X > t) \qquad \forall \quad t \text{ y } s \in N$$

2. **(25 puntos)**

   (a) En general, pruebe que $P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$, siendo E y F dos eventos cualesquiera.

   (b) Demuestre que la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos E y F es

$$P(E) + P(F) - 2P(E \cap F).$$

3. **(25 puntos)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con densidad dada por

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}\, I_{(0,1)}(x) \qquad\qquad (\theta > 1)$$

   (a) Halle la media de una variable aleatoria con densidad $f_\theta(x)$.

   (b) Halle el estimador de momentos de θ.

   (c) Halle el estimador de máxima verosimilitud de θ.

   (d) Pruebe que ambos estimadores son consistentes.

4. **(25 puntos)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $E(\lambda)$ suponga que se desea realizar un test de hipótesis para testear

$$H_o : \lambda = \lambda_o \quad vs \quad H_1 : \lambda > \lambda_o.$$

(a) Deduzca un test de nivel exacto α para decidir entre las dos hipótesis.

(b) Calcule la función de potencia del test planteado en a) para todo λ_1 y exprésela en términos de alguna función de distribución conocida.

(c) ¿Cuánto valdría la función de potencia si $\alpha = 0.05$, n=5, $\frac{\lambda_1}{\lambda_o} = 1.4$? ¿En base a este resultado le parece razonable el test para detectar un λ_1 tal que $\frac{\lambda_1}{\lambda_o} = 1.4$?

Rodríguez Chetz, Hernán

?2 $Z = X+Y$ con $X \sim G(p)$, $Y \sim G(p)$ indep.

$= \{1, 2, \ldots\}$ $R_Y = \{1, 2, \ldots\}$

$R_Z = R_{X+Y} = \{2, 3, \ldots\}$

$$P(Z=z) = P(X+Y=z) = \sum_{k=1}^{z-1} P[(X=k) \cap (= z-k)]$$

$$P(X=k)P(Y=z-k) = \sum_{k=1}^{z-1} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{z-k-1} p = \sum_{k=1}^{z-1} (1-p)^{z-2} p^2 =$$

$$)(1-p)^{z-2} p^2$$

B

llamos $P(X=k \mid X+Y=n)$

$$=k \mid X+Y=n) = \frac{P[(X=k) \cap (X+Y=n)]}{P(X+Y=n)} = \frac{P[(X=k) \cap (Y=n-k)]}{P(X+Y=n)} =$$

$$\frac{(X=k) \cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} = \frac{\cancel{(1-p)^{k-1} p (1-p)^{n-k-1} p}}{(n-1)\cancel{(1-p)^{n-2} p^2}} = \frac{1}{n-1}$$

$$\boxed{P(X=k \mid X+Y=n) = \frac{1}{n-1}}$$

B

¿para qué valores de k y n está definida

$$(X > s+t \mid X > s) = \frac{P[(X > s+t) \cap (X > s)]}{P(X > s)} =$$

$$\frac{(X > s+t)}{P(X > s)}$$ ~~Vemos~~ que pinta tiene $P(X > \ldots)$

$$P(X > m) = 1 - P(X \le m) = 1 - \sum_{k=1}^{m} p(1-p)^{k-1} = 1 - p\sum_{k=1}^{m}(1-p)^{k-1}$$

$1-p = q$ $\quad$ y $\quad k-1 = j \Rightarrow 1 - p\sum_{j=0}^{m-1} q^j$ $\quad$ Aho $\quad p+q=1$

$0 < p \le 1 \Rightarrow 0 \le q < 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{m-1} q^j = \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{1-q^m}{p}$

$$P(X > m) = 1 - p\left(\frac{1-q^m}{p}\right) = 1 - (1-q^m) = 1 - 1 + q^m$$

$$\forall m \in R_X \quad P(X > m) = q^m = (1-p)^m$$

$$\frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s} = (1-p)^t = P(X > t)$$

$$\boxed{\frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = P(X > t)}$$

Rodriguez Ortiz, Hernán

E, F eventos cualesquiera

Vemos que $P(E\cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$

que $P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F)$

o $P(E\cup F) \leq 1 \Rightarrow P(E) + P(F) - P(E\cap F) \leq 1$

$$\boxed{P(E\cap F) \geq P(E) + P(F) - 1}$$

B

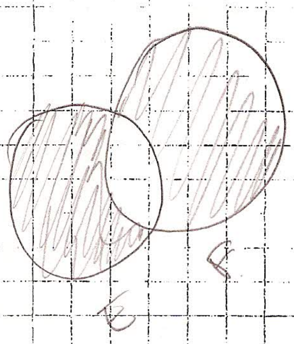
$P((E-F)\cap(F-E)) = P((E\cup F) - (E\cap F))$

o $E\cap F \subseteq E\cup F \Rightarrow P((E\cup F) - E\cap F)) =$

$P(E\cup F) - P(E\cap F) = (P(E) + P(F) - P(E\cap F)) - P(E\cap F) =$

$$\boxed{P(E) + P(F) - 2P(E\cap F)}$$

B



Rodriguez Chetz, Hernán

$X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d con densidad

$$f_\theta(x) = \theta \cdot x^{\theta-1} \cdot I_{(0,1)}(x) \qquad (\theta > 1)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\theta(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \theta \cdot x^{\theta-1} \cdot I_{(0,1)}(x)\, dx =$$

$$\int_0^1 \theta x^\theta\, dx = \theta \int_0^1 x^\theta\, dx = \theta \left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \Big|_0^1 \right] = \boxed{\frac{\theta}{\theta+1}}$$

sabemos que si $E(X_i) = \frac{\theta}{\theta+1} \Rightarrow E(\bar{X}) = \frac{\theta}{\theta+1}$

luego si estimamos por momentos

$$\bar{X} = \frac{\theta}{\theta+1} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}}$$

$$L(\theta) = \theta x_1^{\theta-1} I_{(0,1)}(x_1) \dots \theta x_n^{\theta-1} I_{(0,1)}(x_n) = \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1} \cdot I_{(0,1)}(x_i)$$

luego $x_i \in (0,1)$ $\forall i$ ya que de no ser así $L(\theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = 0$

luego $L(\theta) = \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1}$

como $\ln(x)$ es monótona creciente puedo buscar máximo en $\ell(\theta) = \ln(L(\theta)) = n\ln(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$

$=0 \Leftrightarrow \frac{n}{\hat\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0 \Leftrightarrow \hat\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$

$EMV(\theta) = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$

...os) que son consistentes

...es por L.G.N que $\bar{X} \longrightarrow E(X)$ o sea $\bar{X} \xrightarrow{P} \frac{\theta}{\theta+1}$

$1 - \bar{X} \xrightarrow{P} 1 - \frac{\theta}{\theta+1} = \frac{\theta+1-\theta}{\theta+1} = \frac{1}{\theta+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1-\bar{X}} \xrightarrow{P} \theta+1 \\ \bar{X} \xrightarrow{P} \frac{\theta}{\theta+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \xrightarrow{P} \frac{\theta}{\theta+1} \cdot (\theta+1) = \theta$$

B

$\theta = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$ es consistente.

...os $E(\ln(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x) \cdot f_\theta(x)\,dx = \int_0^1 \ln(x)\,\theta \cdot x^{\theta-1}\,dx =$

...x $\quad u' = \frac{1}{x}$

...$x^{\theta-1}$ $\quad v = x^\theta$ $\Rightarrow \int_0^1 \ln(x) \cdot \theta \cdot x^{\theta-1}\,dx = (\ln x)(x^\theta)\Big|_0^1 -$

...$x^\theta\,dx = -\int_0^1 x^{\theta-1}\,dx = -\frac{x^\theta}{\theta}\Big|_0^1 = -\frac{1}{\theta}$

$E(\ln(x)) = -\frac{1}{\theta}$

Rodriguez Ureta, Hernán

(cat)

uso por L.G.N sabemos que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} \xrightarrow{P} \cancel{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} \longrightarrow \theta$$

B

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$$ es consistente

1) . $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$

2) Sabemos que si $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_0)$ $1 \le i \le n$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma$

o sea $n\bar{X} \sim \Gamma(n, \lambda) \Rightarrow 2\lambda_0 n\bar{X} \sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{2n}{2}$

luego $2\lambda_0 n\bar{X} \sim \chi^2_{2n}$

Luego $P(2\lambda_0 n\bar{X} > \chi^2_{2n,\alpha}) = \alpha \Rightarrow P\left(\bar{X} > \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\lambda_0 n}\right) =$

o sea que rechazo la hipótesis si $\bar{X} > \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\lambda_0 n}$

3) $\Pi(\lambda_1) = P\left(2\lambda_1 n\bar{X} > \frac{\chi^2_{2n,\alpha} \cdot 2\lambda_1 n}{2\lambda_0 n}\right) = P\left(2\lambda_1 n\bar{X} > \chi^2_{2n,\alpha}\right.$

$1 - P\left(2\lambda_1 n\bar{X} \le \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\chi^2_{2n,\alpha}\right)$ como $2\lambda_1 n\bar{X} \sim \chi^2_{2n}$

luego que $\boxed{\Pi(\lambda_1) = F_{\chi^2_{2n}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,\alpha}\right)}$.

B

3) ¿Cuánto vale $\Pi(\lambda_1)$ si $\alpha = 0{,}05$; $n = 5$; $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1{,}4$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cdot \chi^2_{10,0{,}05} = (1{,}4)\, 18{,}307 \simeq 25{,}63$

Luego $\boxed{\Pi(\lambda_1) = F_{\chi^2_{10}}(25{,}63)} \cong 0{,}99$

$\Rightarrow$ ~~no es bueno~~ para detectar λ_1

Sí lo es pues la potencia es grande $\Rightarrow$ enorm

Rodríguez Ortiz, Haroldo

[redacted]

$-\ , X_n$ v.a. i.i.d con distribución $E(\lambda)$

es que si $X_i \sim E(\lambda_0) \quad 1 \le i \le n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda_0)$

$$n\overline{X} \sim \Gamma(n, \lambda_0) \Rightarrow 2\lambda_0 n \overline{X} \sim \Gamma\left(n, \tfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{2n}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \chi^2_{2n}$$

$$2\lambda_0 n\overline{X} \sim \chi^2_{2n}$$

$$P\left(2\lambda_0 n \overline{x} > \chi^2_{2n,\alpha}\right) = \alpha \Rightarrow P\left(\overline{X} > \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\lambda_0 n}\right) = \alpha$$

que rechazo la hipótesis si $\overline{X} > \dfrac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\lambda_0 n}$ B

$$= P\left(2\lambda_1 n\overline{X} > \frac{\chi^2_{2n,\alpha} \cdot 2\lambda_1 n}{2\lambda_0 n}\right) = P\left(2\lambda_1 n \overline{X} > \chi^2_{2n,\alpha}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\right)$$

$\left(2\lambda_1 n\overline{X} \le \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\chi^2_{2n,\alpha}\right)$ como $2\lambda_1 n\overline{X} \sim \chi^2_{2n}$

que $\boxed{\pi(\lambda_1) = F_{\chi^2_{2n}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,\alpha}\right)}$ B

¿Cuánto vale $\pi(\lambda_1)$ si $\alpha = 0{,}05$; $n = 5$; $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1{,}4$?

$$\chi^2_{10,0{,}05} = (1{,}4)\cdot 18{,}307 \simeq 25{,}63$$

$$\boxed{\pi(\lambda_1) = F_{\chi^2_{10}}(25{,}63)} \cong 0{,}99$$

~~es bueno~~ para detectar λ_1

lo es pues la potencia es grande $\Rightarrow$ error tipo II pequeña

Rodriguez Ortiz, Homero