1	2	3	4	Calificación
23	21	26	21	91

Probabilidad y Estadística (C)

Recuperatorio Primer parcial - 5/12/2019

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. ***Realizar cada ejercicio en hoja separada.*** *Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.*

[redacted]

Turno: Tarde: 14 a 17 hs | Noche: 19 a 22 hs | Nº de hojas entregadas: 4

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos.

Recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (25 p.) La cantidad de jugadores "X "que se prueban por semana en el club *La estrella de Humaita* tiene distribución Poisson de media 100. Cada uno de ellos puede ser diestro o zurdo con probabilidad 2/3 y 1/3 respectivamente. La cantidad de jugadores y la pierna fuerte de cada uno de ellos son independientes.
   (a) (4 p.) Dado que en una semana se probaron 70 jugadores, ¿cuál es la probabilidad de que 50 de ellos sean zurdos?
   (b) (9 p.) Llamemos Z a la cantidad de jugadores zurdos que se prueban en una semana. Obtenga $p_{X,Z}$, la función de probabilidad puntual conjunta del vector (X, Z).
   (c) (7 p.) ¿Cuál es la probabilidad de que se prueben 50 zurdos en una semana?
   (d) (5 p.) Dado que se probaron 30 zurdos en una semana, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan probado 90 jugadores en esa semana?

2. (25 p.) Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d., $X_i \sim \varepsilon(\lambda)$. Consideremos m_n, el mínimo de las primeras n variables, definido por

$$m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}. \quad (1)$$

   (a) (10 p.) Calcule f_n, la función de densidad de m_n. Indique a que familia pertenece la distribución de m_n y cuál es su parámetro.
   (b) (7 p.) Para $\varepsilon > 0$, calcule $P(m_n \geq \varepsilon)$.
   (c) (8 p.) Pruebe que m_n converge en probabilidad a 0.

3. (28 p.) Un vendedor ambulante vende anteojos de sol en la playa durante los tres meses de verano (90 días). El sabe por veranos anteriores que la demanda diaria de anteojos es una variable aleatoria con media 10 anteojos por día y desvió estandar 2. Responda a las siguientes preguntas indicando si las probabilidades involucradas son exáctas o aproximadas.
   (a) (7 p.) Si al comenzar el verano el vendedor tiene 940 anteojos para vender, ¿cuál es la probabilidad de que los venda todos?
   (b) (8 p.) ¿Cuántos anteojos debería comprar para que al terminar el verano no le queden anteojos sin vender con probabilidad mayor a 0.95?

(c) (13 p.) Si empezó el verano con 700 anteojos, ¿cuántos días deberá trabajar para vender todos los anteojos con probabilidad mayor a 0.95?

4. (22 p.) Sean X e Y variables aleatorias intependientes con $V(X) = 3$ y $V(Y) = 2$.

   (a) (8 p.) Calcule $cov(Y - 2X, 3X - Y)$.

   (b) (8 p.) Sea $Z = X + 4Y$. Hallar $\rho(X, Z)$.

   (c) (6 p.) Si además $E(X) = 1$ y $E(Y) = 2$. Hallar $V(XY)$

EJ 1
23/25

[redacted]

HOJA N° 1/4

FECHA

① Z_{70} = "cantidad de zurdos que se probaron (de los 70 jugadores)"

a) $P(Z_{70} = 50) = ?$

$Z_{70} \sim Bi(70, 1/3)$

$P(Z_{70} = 50) = p_{Z_{70}}(50) = \binom{70}{50} \cdot (1/3)^{50} \cdot (2/3)^{20} = 67{,}8137 \times 10^{-12}$

Número lindo

SOBREGUSTOS NO HAY NADA ESCRITO...

4/4.

b) Z = "cantidad de $\underbrace{\text{jugadores}}^{\text{zurdos}}$ que se prueban en una semana"

ES $Z|_{X=x}$.

$Z \sim Bi(x, 1/3)$

$$p_{Z|_{X=x}}(z) = \frac{p_{ZX}(z,x)}{p_X(x)} \Rightarrow \binom{x}{z} \cdot (1/3)^z (2/3)^{x-z} \cdot \overbrace{\frac{100^x}{x!} \cdot e^{-100}}^{X \sim P(100)} = p_{ZX}(z,x)$$

$$p_{ZX}(z,x) = \frac{\cancel{x!}}{z!(x-z)!} (1/3)^z (2/3)^{x-z} \cdot \frac{100^x}{\cancel{x!}} \cdot e^{-100}$$

RANGO?

8/9.

c) $$p_Z(z) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{z!(x-z)!} \cdot (1/3)^z (2/3)^{x-z} \cdot \frac{100^x}{e^{100}}$$

$$p_Z(z) = \frac{(1/3)^z}{z!\, e^{100}} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(2/3)^{x-z} \cdot 100^x}{(x-z)!}$$

RANGO

$$p_Z(z) = \frac{(1/3)^z \cdot (2/3)^{-z}}{z! \cdot e^{100}} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(2/3 \cdot 100)^x}{(x-z)!} \cdot \frac{(2/3 \cdot 100)^{-z}}{(2/3 \cdot 100)^{-z}}$$

$$p_Z(z) = \frac{(1/3)^z \cdot (2/3)^{-z}}{z! \cdot e^{100}} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(200/3)^{x-z}}{(x-z)!} \cdot \frac{e^{-200/3}}{e^{-200/3}} = 1$$ porque es la función de prob puntual de una $P(200/3)$

(*) Atrás

$$p_Z(z) = \frac{(1/3)^z \cdot (2/3)^{-z}}{z! \cdot \underbrace{e^{100} \cdot e^{-200/3}}_{e^{100/3}}}$$

$$p_Z(50) = \frac{(1/3)^{50} \cdot (2/3)^{-50}}{50! \cdot e^{100/3}} = 9{,}75 \times 10^{-95}$$

AE.

6/7.

NOTA

d) $P(X=90 \mid Z=30) = \dfrac{P(X=90 \wedge Z=30)}{P(Z=30)} = \dfrac{p_{XZ}(90,30)}{p_Z(30)} =$

$= p_{XZ}(90,30) = p_{ZX}(\overset{z}{30},\overset{x}{90}) = \dfrac{(1/3)^{30} \cdot (2/3)^{60} \cdot 100^{90} \cdot e^{-100}}{30!\ 60!} =$

$p_Z(30) = \dfrac{(1/3)^{30} \ (2/3)^{-30}}{30! \cdot e^{100/3}}$ AE S/S

$= \dfrac{\dfrac{\cancel{(1/3)^{30}} \cdot (2/3)^{60} \cdot 100^{90} \cdot e^{-100}}{\cancel{30!}\ 60!}}{\dfrac{\cancel{(1/3)^{30}} \cdot (2/3)^{-30}}{\cancel{30!} \cdot e^{100/3}}} = \dfrac{(2/3)^{90} \cdot 100^{90} \cdot e^{-200/3}}{60!}$

$= \dfrac{(2/3 \cdot 100)^{90} \cdot e^{-200/3}}{60!}$ AE $\approx 1/3$

yo quisiera (números muy grandes)

ESTO NO ES ASÍ
SI QUERÉS
CONSULTÁ POR QUÉ

~~$= \dfrac{1{,}4184 \times 10^{-16} \cdot 1 \times 10^{90} \cdot 1 \times 10^{90} \cdot 1{,}1444 \times 10^{-29}}{8{,}32099 \times 10^{81}}$~~

(*) Hay que tener en cuenta que $X > Z$, pero [como la diferencia es chica dejo los cálculos así], ya que sino se vuelven muchos cálculos.

?

TERMINA AFECTANDO
EL RESULTADO.

NOTA

TOTAL = 21 P

[redacted]

HOJA Nº 2/4

FECHA

② $X_1,\dots,X_n$ v.a. iid $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$m_n = \min\{X_1,\dots,X_n\}$

a) $F_{m_n}(x) = P(\min\{X_i\} \leq x) = 1 - P(\min\{X_i\} > x)$

$= 1 - [P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \cdot \dots \cdot P(X_n > x)]$

$= 1 - [P(X > x)]^n$

$F_{m_n}(x) = 1 - [1 - \underbrace{P(X \leq x)}_{F_X(x)}]^n$

Podías usar la tabla

$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}^{(x)}$ $F_X(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^x$

para $x > 0$

$F_X(x) = (-e^{-\lambda x} + 1) = (1 - e^{-\lambda x}) \, I_{[0,+\infty)}^{x}$ $1_{(0,\infty)}^{(x)}$

derivada con respecto a x

$f_{m_n}(x) = (F_{m_n}(x))' = \cancel{-}n[1 - F_X(x)]^{n-1} \cdot (\cancel{-} f_X(x))$

$f_{m_n}(x) = n[\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\lambda x})]^{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}^{(x)}$

$= n \, e^{-\lambda x(n-1)} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}^{(x)}$

$= \lambda n \cdot e^{-\lambda x \cdot n} \cdot I_{(0,+\infty)}^{(x)}$

$\Rightarrow \underline{m_n \sim \mathcal{E}(\lambda n)}$ ✓ 10 P

b) $\underline{P(m_n \geq \varepsilon)} = [P(X \geq \varepsilon)]^n = [1 - F_X(\varepsilon)]^n$

$= [\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\lambda\varepsilon})]^n = \underline{e^{-\lambda \varepsilon \cdot n}}$ 7 P

NOTA

c) Si agarramos el resultado de (b) y le aplicamos límite, vemos que la probabilidad tiende a cero para todo epsilon que agarre no importa que tan chico sea, entonces converge en probabilidad a 0.

$$\lim_{n\to\infty} P(|m_n - E(M_n)| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda \cdot \varepsilon \cdot n} = 0 \quad \forall \varepsilon \in (0,+\infty)$$

4p

Por def de tender a probabilidad:

$$P(|m_n - E(M_n)| < \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall \varepsilon \quad ✓$$

NOTA

[redacted]

FECHA

③ D_i = "demanda diaria de anteojos en el día i"

$E(D_i) = 10 \quad \swarrow \sigma_{D_i} = 2 \Rightarrow V(D_i) = 4 = (\sigma_{D_i})^2$

desvío

a) $P\left(\sum_{i=1}^{90} D_i \geq 940\right) = P\left(\frac{\sum D_i - E(\sum D_i)}{\sigma_{\sum D_i}} \geq \frac{940 - E(\sum D_i)}{\sigma_{\sum D_i}}\right) = (*)$

$E\left(\sum^{90} D_i\right) \underset{\text{indep}}{=} 90 \cdot E(D) = 90 \cdot 10 = 900$

→ Acá no se usa

→ Acá sí se usa que son indep.

$V\left(\sum^{90} D_i\right) = 90 \cdot V(D) = 90 \cdot 4 = 360 \Rightarrow \sigma_{\sum D_i} = 6\sqrt{10}$

$(*) = 1 - P\left(\frac{\sum^{90} D_i - 900}{6\sqrt{10}} < \frac{940-900}{6\sqrt{10}}\right) = 1 - \phi(2{,}1082)$

$= 1 - 0{,}98249$?

$P\left(\sum_{i=1}^{90} D_i \geq 940\right) = 0{,}01751$

Esta probabilidad es aproximada ya que usamos el teorema central del límite y aproximamos a una normal(0,1).

b) $P\left(\sum_{i=1}^{90} D_i \geq n\right) \geq 0{,}95$

$1 - P\left(\frac{\sum^{90} D_i - 900}{6\sqrt{10}} < \frac{n-900}{6\sqrt{10}}\right) \geq 0{,}95$

$\phi\left(\frac{n-900}{6\sqrt{10}}\right) < 0{,}05$

$\frac{n-900}{6\sqrt{10}} < -1{,}65$

$n < 868{,}69 \Rightarrow n \leq 868$

Rta: Tiene que comprar 868 anteojos

Esta probabilidad también es aproximada porque usamos TCL.

NOTA

c) $P\left(\sum^{n} D_i \geq 700\right) \geq 0{,}95$

$$P\left(\frac{\sum^{n} D_i - n.10}{\underbrace{\sqrt{n.4}}_{V(\sum^{n} D_i)}} \geq \frac{700 - n.10}{\sqrt{n.4}}\right) \geq 0{,}95$$

$$1 - \phi\left(\frac{700 - n.10}{\sqrt{n.4}}\right) \geq 0{,}95$$

$$\phi\left(\frac{700 - n.10}{\sqrt{n.4}}\right) < 0{,}05$$

$$\frac{700 - n.10}{\sqrt{n.4}} < -1{,}65$$

$$700 - n.10 + 1{,}65\sqrt{n.4} < 0$$

Cambio de variable

$z = \sqrt{n} \Rightarrow -z^2 . 10 + 1{,}65 . \sqrt{4} . z + 700 = 0$ → $z_1 = 8{,}5332$; ~~$z_2 = -8{,}20323$~~

¿Por qué?

$\Rightarrow n \geq 72{,}8155 \Rightarrow n = 73$

Rta: Deberá trabajar 73 días!

Este resultado es aproximado por usar TCL.

NOTA

[redacted]

4/4

$P_{tot} = 21$

④ x, y v.a. indep $V(x)=3 \quad V(y)=2$

8p a) $cov(y-2x, 3x-y) = cov(y, 3x-y) + cov(-2x, 3x-y)$

$= \cancel{cov(y, 3x)}^{0} - cov(y,y) - cov(2x, 3x) + \cancel{cov(2x, y)}^{0}$

$= -V(y) - 6\,V(x) + 0$

$= -2 - 6 \cdot 3 = -20$

cero porque son independientes!

$cov(y,y) = E(y \cdot y) - E(y) \cdot E(y) = V(y)$

8p b) $z = x + 4y$

$\rho(x,z) = \dfrac{cov(x,z)}{\sqrt{V(x) \cdot V(z)}}$

$cov(x,z) = cov(x, x+4y) = V(x) + \cancel{cov(x, 4y)}^{0} = V(x) = 3$

$V(z) = V(x+4y) \underset{\text{indep}}{=} V(x) + V(4y) = \underbrace{V(x)}_{3} + 16\underbrace{V(y)}_{2} = 35$

$\rho(x,z) = \dfrac{3}{\sqrt{3 \cdot 35}} = 0{,}2928$

5p c) $V(x \cdot y) = E[(x \cdot y)^2] - E(x \cdot y)^2$

$= E(x^2 \cdot y^2) - [E(x) \cdot E(y)]^2$

$\overset{\text{x e y indep}}{=} E(x^2) \cdot E(y^2) - [1 \cdot 2]^2$

$= [V(x) + E(x)^2] \cdot E(y^2) - 4$

$= [3+1] \cdot [V(y) + E(y)^2] - 4$

$V(x \cdot y) = \underbrace{4 \cdot [2+4]}_{24} - 4 = 16 - 4 = 12$ X

$= 24 - 4 = 20$

NOTA