ANÁLISIS I - ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA I - ANÁLISIS II (C)
1er. cuatrimestre 2022

TEMA 2

RECUPERATORIO
PRIMER PARCIAL
11/07/2022

1	2	3	4	Nota
B	B	R	B	8,5

Recuerde justificar todas las respuestas.

NOMBRE Y APELLIDO: DANTE CULACIATI L.U.: 351/22 TURNO: 1

2

1. (2 puntos) Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene de intersecar las superficies

$$2x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{y} \quad z = y + 1$$

(a) Hallar una función $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imágen describa a la curva $\mathcal{C}$.

(b) Verificar que el punto $P = (1, 0, 1)$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.

3

2. (3 puntos) Analizar la existencia de los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{y(y+1)\sin^2(x-2)}{(x-2)^2 + (y+1)^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4 + y^8}$.

1,5

3. (3 puntos) Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(y+2)\operatorname{sen}(y+2)}{3(x-1)^2 + 2(y+2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,-2) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,-2). \end{cases}$$

(a) Determinar todas las direcciones $v = (a, b) \neq (0, 0)$ respecto de las cuales exista la derivada direccional de f en $(1, -2)$ y en esos casos, determinar su valor.

(b) Analizar la diferenciabilidad de la función f en $(1, -2)$.

2

4. (2 puntos) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(2, -1)$. Consideremos la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = f(1 + ye^x, -y^3 + xy).$$

Hallar el plano tangente de $g(x, y)$ en el punto $(0, 1)$, sabiendo que el plano tangente de f en $(2, -1)$ es $2x - 6y + 2z = 8$.

DANTE CULACIATI	DNI: 45.428.879 LU: 351/22	HOJA Nº 1 FECHA 11/07/22

1) Tengo una curva C que se obtiene de intersecar las superficies

$$2x^2+y^2-z^2=1 \quad (1) \qquad y \qquad z=y+1 \quad (2)$$

a) Quiero hallar una función $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa a C.

Considero el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-z^2=1 & (1) \\ z=y+1 & (2) \end{cases}$$

Reemplazando z en (1), tengo que

$$2x^2+y^2-(y+1)^2=1 \iff 2x^2+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-2y-1=1$$
$$\iff 2x^2-2y=2$$
$$\iff 2(x^2-y)=2$$
$$\iff x^2-y=1$$
$$\iff y=x^2-1$$

Ahora, como $z=y+1$, entonces $z=x^2-1+1=x^2$.

Finalmente, puedo plantear una función $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:

$$\boxed{r(x)=(x,\ x^2-1,\ x^2)}$$ y su imágen describe a C.

b) Quiero verificar que el punto $P=(1,0,1)$ pertenece a la curva C, y hallar la ecuación de la recta tangente a C en el punto P.

Sé que P pertenece a C si y solo si existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r(x_0)=P$.

Esto ocurre si

$$\begin{cases} x_0=1 & & (1=1\ \checkmark) \\ x_0^2-1=0 & \iff x_0=1 & (1^2-1=0\ \checkmark) \\ x_0^2=1 & & (1^2=1\ \checkmark) \end{cases}$$

Por lo tanto, P pertenece a C.

(SIGUE A LA VUELTA)

NOTA

Sé que la ecuación de una recta tangente L_t a C en un punto P está dada por:

$L_t: \lambda r'(x_0) + r(x_0)$ donde λ es un escalar en $\mathbb{R}$, y x_0 es un valor en $\mathbb{R}$ tal que

$r(x_0) = P$

Ya tengo que $r(1) = P = (1,0,1)$. Falta encontrar $r'(x)$ y $r'(1)$.

$r'(x) = (1, 2x, 2x) \Rightarrow r'(1) = (1,2,2)$

Finalmente, la recta tangente a C en el punto P es

$$\boxed{L_t: \lambda(1,2,2) + (1,0,1)}$$

(Ejercicio 2) en hoja 2).

NOTA

Dante Culaciati

HOJA N° 2

FECHA

2) a) Quiero analizar la existencia de los siguientes límites

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{y(y+1)\sin^2(x-2)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

Hago un cambio de variables

$$\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x'+2 = x \\ y'-1 = y \end{cases}$$

(Luego, cuando $(x,y)\to(2,-1)$, $(x',y')\to(0,0)$)

Reemplazando, tengo

$$\lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{(y'-1)\,y'\sin^2(x')}{x'^2+y'^2}$$

(Vuelvo a llamar x, y a x', y' por comodidad y prolijidad).

Voy a probar por teorema de sándwich que este límite existe y da 0.

$$0 \leq \left|\frac{(y-1)\,y\,(\operatorname{sen}(x))^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|y-1|\,|y|\,|\operatorname{sen}(x)|^2}{|x^2+y^2|} \leq \frac{|y-1|(x^2+y^2)^{1/2}\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}}$$

- $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+y^2}$
- $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|\ \forall x$, y $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+\underbrace{y^2}_{\geq 0}}$

y $\sqrt{x^2+y^2}^{\,2} = (x^2+y^2)$

$$= |y-1|(x^2+y^2)^{1/2}$$

Por lo tanto, $0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{(y-1)\,y\,\operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y-1|(x^2+y^2)^{1/2} = |0-1|\cdot(0) = 0$

NOTA

~~Entonces, $0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-1)\, y \operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^2} \leq 0$~~

Y por Teorema del Sándwich, $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-1)\, y \operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^2} = 0}$

Como se quería probar.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^8}$

Primero, tomo límites iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^3}{x^4+y^8}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^3}{x^4+y^8}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^8}\right) = 0$$

Por lo tanto, si el límite existe, es igual a 0 (y debería dar 0 sin importar por qué curva me aproxime).

Pero si tomo $\underline{x^2 = y^3}$ (Entonces también vale que $\underline{x^4 = y^6}$), me queda

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^3 \cdot y^3}{y^6+y^8} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^6(1+y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, el límite no existe.

(Ejercicio 3 en hoja 3)

DANTE CULACIATI

HOJA N° 3

FECHA

3) Tengo una función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(y+2)\operatorname{sen}(y+2)}{3(x-1)^2 + 2(y+2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,-2) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,-2) \end{cases}$$

Antes que nada, hago un cambio de variable(s) y defino una nueva función f^*:

$$\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x'+1 = x \\ y'-2 = y \end{cases}$$

(Puedo usar estas ecuaciones para "pasar puntos" de f a f^*, donde $f(x,y) = f^*(x-1, y+2)$)

(Por ejemplo, $f(1,-2) = f^*(0,0)$) ok.

Entonces, tengo que

$$f^*(x',y') = \begin{cases} \dfrac{x'y'\operatorname{sen}(y')}{3x'^2 + 2y'^2} & \text{si } (x',y') \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x',y') = (0,0) \end{cases}$$

(Por comodidad y prolijidad, vuelvo a llamar x, y a x', y'). ok.

a) Quiero determinar todas direcciones $v = (a,b) \neq (0,0)$ respecto de las cuales exista la derivada direccional de f en $(1,-2)$ y en esos casos, determinar su valor.

Ojo, es más que esto

Primero, observo que $f(1,-2) = f^*(0,0)$, así que trabajo con f^*.

Además, observo que f^* es continua en $(0,0)$. ~~Por~~ [struck out]

NOTA

(Es continua pues $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f^*(x,y) = f^*(0,0) = 0$

Porque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f^*(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\,\mathrm{sen}(y)}{3x^2+2y^2}$.

Pero $0 \leq \left| \dfrac{xy\,\mathrm{sen}(y)}{3x^2+2y^2} \right| \leq \dfrac{\cancel{|x^2+y^2|}\,|y|}{\cancel{|x^2+y^2|}} = |y|$

$$\left(\begin{array}{l} - 0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ \qquad \iff \quad x^2+y^2 \geq 2xy \geq xy \\ - 3x^2 \geq x^2 \quad \text{y} \quad 2y^2 \geq y^2 \\ - |\mathrm{sen}(y)| \leq |y| \ \forall y \end{array} \right)$$

$\therefore \quad 0 \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f^*(x,y)| \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f^*(x,y) \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f^*(x,y) = 0 = f^*(0,0)$

(Por sándwich)

Luego, f^* es continua en $(0,0)$.)

Tengo un vector $V = (a,b) \neq (0,0)$. Sé que cualquier dirección puede ser representada por un vector $v = (a,b)$, con $|v| = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1$

Por definición, la derivada direccional de $f^*_{(0,0)}$ en la dirección de v es.

$D_v f^*(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^*(ha,hb) - f^*(0,0)}{h}$ (También, $D_v f^*(0,0) = \nabla f^*(0,0) \cdot V$)

(Sigue en hoja 4)

NOTA

Dante Culacciati

HOJA Nº 4

FECHA

~~Como~~ Sé que $f^*(0,0)=0$. Calculo $f^*(ha, hb)$.

$$f^*(ha,hb) = \frac{(ha)(hb)\,\text{sen}(hb)}{3(ha)^2+2(hb)^2} = \frac{h^2\,ab\,\text{sen}(hb)}{3h^2a^2+2h^2b^2} = \frac{\cancel{h^2}(ab\,\text{sen}(hb))}{\cancel{h^2}(3a^2+2b^2)}$$

$$= \frac{ab\,\text{sen}(hb)}{3a^2+2b^2}$$ ✓

Entonces,

$$D_v f^*(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{ab\,\text{sen}(hb)}{(3a^2+2b^2)} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ab}{(3a^2+2b^2)} \cdot \frac{\text{sen}(hb)}{h}$$

$$= \frac{ab}{3a^2+2b^2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(hb)}{h} = \frac{ab}{3a^2+2b^2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos(hb)\cdot b}{1} = \frac{ab}{3a^2+2b^2}\cdot b = \frac{ab^2}{3a^2+2b^2}$$ ✓

Como si reemplazo por h, me queda $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital.

$a^2+b^2=1$

Como esta expresión sólo se anula en $(a,b)=(0,0)$ (por el denominador), pero $v \neq (0,0)$, entonces, <u>$D_v f^*(0,0)$ existe en todas las direcciones</u>. ✓

~~Cal~~ Para calcular su valor, tomo que $D_v f^*(0,0) = \nabla f^*(0,0)\cdot v$

$$\nabla f^*(0,0) = \left[\, f^*_x(0,0) \quad f^*_y(0,0) \,\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} f^*(h,0) = \dfrac{h\cdot 0\cdot \text{sen}(0)}{3h^2+2\cdot 0^2} = 0 \\[2ex] f^*(0,h) = \dfrac{0\cdot h\cdot \text{sen}(h)}{3\cdot 0^2+2\cdot h^2} = 0 \end{array} \right)$$

Por definición

$$f^*_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^*(h,0)-f^*(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f^*_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^*(0,h)-f^*(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

No! Esto vale si f es Diferenciable!

NOTA

Entonces, $D_v f^*(0,0) = \nabla f^*(0,0)\cdot v = (0,0)\cdot v = 0\cdot a + 0\cdot b = \boxed{0}$

(Sin importar la dirección) ¡Ya los habías calculado!

$v=(a,b) \Rightarrow f_v(1,-2) = \dfrac{ab^2}{3a^2+3b^2}$

b) Quiero analizar la diferenciabilidad de f en $(1,-2)$

Como $f(1,-2) = f^*(0,0)$, trabajo con f^*

f^* es diferenciable en $(0,0) \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f^*(x,y)-\Pi_t}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

donde Π_t es el plano "tangente" a f^* en el $(0,0)$

$$\Pi_t: z = \overbrace{f^*(0,0)}^{=0} + \overbrace{f^*_x(0,0)}^{=0}x + \overbrace{f^*_y(0,0)}^{=0}y = 0$$

(Observo que ya probé que f^* es continua en $(0,0)$, así que puede ser diferenciable en $(0,0)$) ok.

Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f^*(x,y)-\Pi_t}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy\,\mathrm{sen}(y)}{3x^2+2y^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

No $\to\infty$ tenés $0\cdot\infty$ ind.

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,\mathrm{sen}(y)}{3x^2+2y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \boxed{0}$$

(Este límite ya lo calculé, y vale 0)

Por lo tanto, f^* es diferenciable en $(0,0)$

(Ejercicio 4) en hoja 5)

NOTA

DANTE CULACIATI

HOJA N° 5

FECHA

4) Tengo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(2,-1)$.

Considero $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = f(1 + ye^x, -y^3 + xy)$$

Quiero hallar el plano tangente de $g(x,y)$ en el punto $(0,1)$, sabiendo que el plano tangente de f en $(2,-1)$ es $2x - 6y + 2z = 8$.

En primer lugar, considero una función $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$,

donde $u(x,y) = (1 + ye^x)$ y $v(x,y) = (-y^3 + xy)$

Por lo tanto, puedo decir que $g(x,y) = (f \circ h)(x,y) = f(h(x,y))$.

Por definición, los planos tangentes a f y a g en los puntos $(2,-1)$ y $(0,1)$, respectivamente, son:

$$\Pi_f: z = f(2,-1) + f_x(2,-1)(x-2) + f_y(2,-1)(y+1)$$

$$\Pi_g: z = g(0,1) + g_x(0,1)\, x + g_y(0,1)(y-1)$$

Quiero hallar $g(0,1)$, $g_x(0,1)$ y $g_y(0,1)$

observo que, como Π_f (en $(2,-1)$) también es $2x - 6y + 2z = 8$, tengo que

$$2x - 6y + 2z = 8$$

De esta ecuación, puedo calcular $f(2,-1)$, $f_x(2,-1)$ y $f_y(2,-1)$

$$\iff 2z = 8 - 2x + 6y$$

$$\iff z = 4 - x + 3y$$

(Sigue a la vuelta).

NOTA

$$z = 4 - x + 3y \,[\text{redacted}] \Rightarrow \begin{cases} f_x(2,-1) = -1 \\ f_y(2,-1) = 3 \end{cases}$$ ¿Cómo? (Coeficientes de x e y).

Luego, $\Pi_f : z = f(2,-1) + \underbrace{f_x(2,-1)}_{=-1}(x-2) + \underbrace{f_y(2,-1)}_{=3}(y+1)$

$\iff z = f(2,-1) - x + 2 + 3y + 3$

Reemplazo por

$\iff 4 \cancel{-x} \cancel{+3y} = f(2,-1) \cancel{-x} \cancel{+3y} + 5$

$\iff f(2,-1) = -1$

$$\boxed{h(0,1) = (1 + 1\cdot e^0, -(1)^3 + 0\cdot 1) = (2,-1)}$$

Luego, tengo que

- $g(0,1) = f(h(0,1)) = f(2,-1) = -1$

- $\nabla g(0,1) = \nabla(f \circ h)(0,1) = \nabla f(h(0,1)) \cdot Dh(0,1) = \nabla f(2,-1) \cdot \begin{bmatrix} u_x(0,1) & u_y(0,1) \\ v_x(0,1) & v_y(0,1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{f_x(2,-1)}_{=-1} & \underbrace{f_y(2,-1)}_{=3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1+3) & (-1-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \end{bmatrix}$$

- $u_x = y \cdot e^x \Rightarrow u_x(0,1) = 1$
- $u_y = e^x \Rightarrow u_y(0,1) = 1$
- $v_x = y \Rightarrow v_x(0,1) = 1$
- $v_y = -3y^2 + x \Rightarrow v_y(0,1) = -3$

Por lo tanto,

$$\nabla g(0,1) = \begin{bmatrix} g_x(0,1) & g_y(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} g_x(0,1) = 2 \\ g_y(0,1) = -10 \end{cases}$$

Finalmente, el ~~[illegible]~~ plano tangente a g en el punto (0,1) es:

$$\boxed{\Pi_g : z = -1 + 2x + (-10)(y-1) = 2x - 10y + 9}$$