1	2	3	4	5
B	B	/	B=	M

CALIF.
A

Fecor

Álgebra I - 2do Cuatrimestre 2016
Segundo Parcial - 29/11/2016

1. Determinar todos los $a \in \mathbb{N}$ tales que $(3a^{650} - 52a : 37a) \neq a$.

2. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales se verifica simultáneamente que 2^n tiene resto 10 en la división por 11 y 3^{n+1} tiene resto 1 en la división por 16.

3. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio
$$X^n + 2X^5 + 3X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 2X + 1$$
contiene entre sus raíces a un elemento de G_5.

4. Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio
$$3X^5 + 18X^4 + 39X^3 + 36X^2 + 6X - 12$$
sabiendo que la suma de todas sus raíces no racionales excepto una es igual a $-3 + i$.

5. Determinar todos los $f \in \mathbb{R}[X]$ mónicos de grado mínimo que satisfacen simultáneamente:
   - f contiene entre sus raíces a todas las raíces quintas primitivas de la unidad,
   - $X^2 + 1$ divide a $(f : f')$,
   - f tiene al menos dos raíces enteras,
   - $f(0) = 10$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1: $d = (3a^{650} - 52a : 37a) \neq a$.

Como a divide a ambos términos, pero $d \neq a$, entonces hay un divisor m.c. ~~mayor que~~ múltiplo de a: $a.q$ ✓ con $q \neq 1$.

- 37 es un número primo. veo si $37a \mid 3a^{650} - 52a$ ✓

$3a^{650} - 52a = 37 \cdot a \cdot K$

$3a^{649} - 52 = 37K$

$3a^{649} = 37K + 52$

$3a^{649} \equiv 52 \equiv 15\ (37)$

multiplico por 25.

$75a^{649} \equiv 375\ (37)$

$a^{649} \equiv 5\ (37)$ → Si $37 \mid a \Rightarrow 37 \mid a^{649}$, pero $37 \mid a^{649} - 5$ y $37 \nmid 5$

entonces $37 \nmid a$ ✓ $\Rightarrow (37 : a) = 1 \Rightarrow$ USO FERMAT: $a^{36} \equiv 1 (37)$ ✓

$\underbrace{(a^{36})^{18}}_{\equiv 1 (37)} \cdot a^1 \equiv 5\ (37)$

$\boxed{a \equiv 5\ (37)}$ ✓

→ valores de $a \in \mathbb{N}$ que cumplen

$(3a^{650} - 52a : 37a) \neq a$.

Bien.

Ejercicio 2

$$\begin{cases} Ⓐ \; 2^n \equiv 10 \ (11) \\ Ⓑ \; 3^{n+1} \equiv 1 \ (16) \longrightarrow 3 \cdot 3^n \equiv 1 \ (16) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times 11} 33 \cdot 3^n \equiv 11 \ (16) \iff 3^n \equiv 11 \ (16)$$

Voy a evaluar ambas expresiones para distintos valores de n

Como sé que, en el caso Ⓐ sólo hay 11 restos posibles, y en el Ⓑ 16, voy a tratar de encontrar un patrón para el resultado que se espera:

- $2^n \equiv 10 \ (11)$

$2^1 \equiv 2 \ (11)$

$2^2 \equiv 4 \ (11)$

$2^3 \equiv 8 \ (11)$

$2^4 \equiv 5 \ (11)$

$\boxed{2^5 \equiv 10 \ (11)}$

$2^6 \equiv 9 \ (11)$

$2^7 \equiv 7 \ (11)$

$2^8 \equiv 3 \ (11)$

$2^9 \equiv 6 \ (11)$

$2^{10} \equiv 1 \ (11)$

$2^{11} \equiv 2 \ (11)$

$2^{12} \equiv 4 \ (11)$

$2^{13} \equiv 8 \ (11)$

$2^{14} \equiv 5 \ (11)$

$2^{15} \equiv 10 \ (11)$
$\vdots$
$2^{25} \equiv 10 \ (11)$
$\vdots$
$2^{35} \equiv 10 \ (11)$

- $3^n \equiv 11 \ (16)$

$3^1 \equiv 3 \ (16)$

$3^2 \equiv 9 \ (16)$

$\boxed{3^3 \equiv 11 \ (16)}$

$3^4 \equiv 1 \ (16)$

$3^5 \equiv 3 \ (16)$

$3^6 \equiv 9 \ (16)$

$\boxed{3^7 \equiv 11 \ (16)}$

$3^8 \equiv 1 \ (16)$

$3^9 \equiv 3 \ (16)$

$3^{10} \equiv 9 \ (16)$

$3^{11} \equiv 11 \ (16)$
$\vdots$
$3^{15} \equiv 11 \ (16)$

$3^{19} \equiv 11 \ (16)$

- En el caso de Ⓐ encuentro un patrón de resto 5 módulo 10

para n $\Rightarrow$ $n \equiv 5 \ (10)$

Para Ⓑ $\Rightarrow$ $n \equiv 3 \ (4)$

Entonces debo encontrar a n tal que se cumplan

$$\begin{cases} n \equiv 5 \ (10) \\ n \equiv 3 \ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv 5 \equiv 0 \ (5) \\ n \equiv 5 \equiv 1 \ (2) \rightarrow \text{Lo descarto} \\ n \equiv 3 \ (4) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} n \equiv 0 \ (5) \rightarrow n = 5q \\ n \equiv 3 \ (4) \end{cases}$$

$5q \equiv 3 \ (4)$

$q \equiv 3 \ (4)$

$\downarrow$

$q = 4k + 3$

entonces $n = 5(4k+3)$

$n = 20k + 15$

$\therefore \boxed{n \equiv 15 \ (20)}$

Bien.

Ejercicio 4 $f = 3X^5 + 18X^4 + 39X^3 + 36X^2 + 6X - 12$

No es mónico. para facilitar el trabajo tomo

$f = X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 12X^2 + 2X - 4$, que sé que tiene las mismas raíces.

Primero busco alguna raíz racional.

Por Gauss, puedo buscar una raíz $\alpha = \frac{p}{q}$ / $p | 4$ y $q | 1$.

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ No evalúo el polinomio en valores positivos dado que la estructura del polinomio indica que no me van a servir (todos coeficientes positivos menos el último)

$\cdot f(-1) \neq 0$; $\boxed{f(-2) = 0}$; $f(-4) \neq 0$

$\alpha = -2$ es una raíz. Veo si es múltiple:

$f' = 5X^4 + 24X^3 + 39X^2 + 24X + 2$

$f'(-2) \neq 0 \rightarrow$ no es raíz múltiple.

Entonces factorizo:

$$
\begin{array}{l|l}
X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 12X^2 + 2X - 4 & X+2 \\
\underline{X^5 + 2X^4} & X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 2X - 2 \\
\quad 4X^4 + 13X^3 + 12X^2 + 2X - 4 & \\
\quad \underline{4X^4 + 8X^3} & \\
\qquad 5X^3 + 12X^2 + 2X - 4 & \\
\qquad \underline{5X^3 + 10X^2} & \\
\qquad\quad 2X^2 + 2X - 4 & \\
\qquad\quad \underline{2X^2 + 4X} & \\
\qquad\qquad -2X - 4 & \\
\qquad\qquad \underline{-2X - 4} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$\downarrow$

$f = \underbrace{(X+2)}_{g} \underbrace{(X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 2X - 2)}_{h}$

No hay raíces racionales para $h \rightarrow$ irreducible en $\mathbb{Q}[X]$

Busco raíces complejas para h: $a; b, c, d$.

$h = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 2X - 2 = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$

$= X^4 - X^3(a+b+c+d) + X^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - X(bcd+acd+abd+abc) + abcd$

El enunciado me dice que la suma de todas las raíces no racionales excepto una, es igual a $-3+i$. tomo entonces el coeficiente $-(a+b+c+d) = 4$

$\Longleftrightarrow -4 = a+b+c+d = a + (-3+i)$ (sigue atrás)

$\hookrightarrow$

NOTA

$-4 = a+b+c+d$

$-4 = a + (-3+i)$

$a = -4+3-i = -1-i \Rightarrow \boxed{a=-1-i}$ ✓

Como los coeficientes del polinomio son reales, entonces sé que el conjugado de a también será raíz:

$\boxed{b = -1+i}$. ✓

$\Rightarrow -4-c-d = a+b$.

$a+b = (-1+i)+(-1-i) = -4-c-d$.

$-2 = -4-c-d$

$+2 = -c-d \Leftrightarrow \boxed{c+d=-2}$ ⊛

• Entonces factorizo $h = (x-(-1-i))(x-(-1+i)) \cdot q$ ⊛

⊛ $(x-(-1-i))(x-(-1+i))$

$= ((x+1)+i)((x+1)-i)$

$= ((x+1)^2 - i^2) = x^2+2x+2$ ✓

$$
\begin{array}{l|l}
h = x^4+4x^3+5x^2+2x-2 & x^2+2x+2 = ⊛ \\
\underline{x^4+2x^3+2x^2} & \overline{q = x^2+2x-1} \\
\quad 2x^3+3x^2+2x-2 & \\
\quad \underline{2x^3+4x^2+4x} & \\
\qquad -x^2-2x-2 & \\
\qquad \underline{-x^2-2x+2} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$
✓

$h = \underset{Ⓐ}{(x^2+2x-1)}\ \underset{Ⓑ}{(x^2+2x+2)}$.

Busco raíces de Ⓐ : $\dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot(-1)}}{2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = \dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}$ $\nearrow -1+\sqrt{2}$, $\searrow -1-\sqrt{2}$ ✓

$\boxed{c = -1+\sqrt{2}}$
$\boxed{d = -1-\sqrt{2}}$

$c+d = (-1+\sqrt{2}) + (-1-\sqrt{2}) = -2$ ✓ ← cumple la condición ⊛

Se puede factorizar (tiene z y $\bar{z}$, y tiene $a+b\sqrt{c}$, $a-b\sqrt{c}$).

$f = (x+2)(x^4+4x^3+5x^2+2x-2) \rightarrow$ factorizado en $\mathbb{Q}[x]$ → factor de grado 4 sin raíces racionales (irreducible)

$f = (x+2)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(x^2+2x+2) \rightarrow$ factorizado en $\mathbb{R}[x]$ → factores de grado 1 y uno de grado 2 sin raíces reales (irreducible)

$f = (x+2)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(x+1+i)(x+1-i) \rightarrow$ factorizado en $\mathbb{C}[x]$

↳ todos factores de grado 1 (irreducibles). ✓

NOTA

Se pedía factorizar 3.f.