TEMA 2

1	2	3	4	Calificación
B-/R	B	R-	B	7

APELLIDO Y NOMBRE: TOMAS LISAZO NO. DE LIBRETA: 1783/21

CARRERA: LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMP. TURNO DE PRÁCTICA: 2

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre 2022 – Primer Parcial – 15/10/22

1. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 200\}$ e $Y = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$.
En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la forma:

$$A \mathcal{R} B \iff B - A \subseteq Y.$$

   a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

   b) Sea $B = \{n \in X : n \text{ es par}\}$. ¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ satisfacen simultáneamente $A \mathcal{R} B$ y $\#(A \cap B) = 80$?

2. Conjeturar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida a continuación y probar su validez.

$$a_0 = 3 \quad \text{y} \quad a_n = \begin{cases} 2\, a_{n-1} & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{1}{3}\, a_{n/2}^2 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}, \forall n \geq 1.$$

3. Probar que $6^{2n} - 35n - 1$ es divisible por 245 para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 7$. Calcular los posibles valores de $(15a^2 - 9b + 27 : 189)$ y dar un ejemplo de a y b para cada caso.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

TOMAS LISAZO

Hoja 1

LU: 1783/21

① ⓐ Reflexividad

$A - A = \emptyset$

$\emptyset \subseteq Y \Rightarrow A - A \subseteq Y \Leftrightarrow A \mathcal{R} A$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ es reflexiva ✓

Simetria

Si tomamos $A = \{99, 100\}$ y $B = \{100, 101\}$, ocurre que

$$\left.\begin{array}{l} A - B \subseteq Y \Leftrightarrow B \mathcal{R} A \\ A - B \subseteq Y \Leftrightarrow A \mathcal{R} B \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Con } A \neq B$$

$B - A$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ no es simetrica

$A - B \subset Y$ pero $B - A \not\subset Y$

Antisimetria

Si tomamos $A = \{99, 100\}$ y $B = \{98, 100\}$, ocurre que

$$\left.\begin{array}{l} A - B \subseteq Y \Leftrightarrow B \mathcal{R} A \\ B - A \subseteq Y \Leftrightarrow A \mathcal{R} B \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Con } A \neq B$$

$A \mathcal{R} B \wedge B \mathcal{R} A$ pero $A \neq B$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ no es antisimetrica

Transitividad

$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow B - A \subseteq Y$

$B \mathcal{R} C \Leftrightarrow C - B \subseteq Y$

$B - A \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x \notin Y$ se tiene que $(x \in B$ y $x \in A)$ o $(x \notin B)$ ✓

$C - B \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x \notin Y$ si tiene que $(x \in C$ y $x \in B)$ o $(x \notin C)$ ✓

Sea $x \notin Y$ Si $(x \in B$ y $x \in A) \Rightarrow x \notin C - B$ si $x \in C \Rightarrow x \in A$ y $x \in C$ ✓

Si $(x \notin B) \Rightarrow x \notin C - B$ si $x \notin C \Rightarrow x \notin C$

Si $(x \in A$ y $x \in C) \Rightarrow x \notin C - A \Rightarrow C - A \subseteq Y \Rightarrow A \mathcal{R} C$

Si $x \notin C \Rightarrow x \notin C - A \Rightarrow C - A \subseteq Y \Rightarrow A \mathcal{R} C$ ✓

$\Rightarrow \mathcal{R}$ si es transitiva.

⑥ Si $\#(A \cap B) = 80 \Rightarrow A$ y B tienen 80 elementos en comun

$\#B = 100$ ← De los cuales 50 son ≥ 100 /

$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow B - A \subseteq Y$

Para que $B - A \subseteq Y$, A debe tener minimamente los elementos en B que son > 100, es decir $\#A \geq 50$, y conocemos esos elementos.

Como nos dicen $\#(A \cap B) = 80$, necesitamos que 30 elementos de B esten en A (porque ya tenemos 50 en comun). /

De los 50 elementos que quedan por elegir, agarramos 30 $\Rightarrow \binom{50}{30}$ /

Ahora, los elementos restantes de X pueden o no estar en A, no nos es relevante porque ya cumplimos que $A \mathcal{R} B$ y $\#(A \cap B) = 80$

Quedaron 120 elementos que PUEDEN estar en $A \Rightarrow 2^{120}$.

100 : si elijo pares de más $\#(A \cap B) > 80$

Finalmente, existen $\binom{50}{30} 2^{120}$ conjuntos A tal que $A \mathcal{R} B$ y $\#(A \cap B) = 80$.

$\binom{50}{30} 2^{100}$

② Primero, calculo unos terminos y observo su comportamiento.

3, 6, 12, 24, 48 ... ← Deduzco la formula $3 \cdot 2^n$ / probemosla.

Paso inductivo

Supongo que ~~∃~~ si dado $K \in \mathbb{N}$ tal que $\forall h, 0 \leq h \leq K$ se cumple que

$a_h = 3 \cdot 2^h$ /

Quiero probar que $a_{K+1} = 3 \cdot 2^{K+1}$ /

Tengo que separar en casos, porque la sucesion depende de la paridad.

Supongo primero $K+1$ impar. /

TOMAS
LISAZO

Hoja 2
LU: 1783/21

$\Rightarrow a_{K+1} = 2a_K \underset{\text{Por HI}}{=} 2 \cdot 3 \cdot 2^K = \boxed{3 \cdot 2^{K+1}}$ Como se quería probar

Ahora el caso par. Llamo $2J = K+1$, con $J \leq K$

$\Rightarrow a_{K+1} = \frac{1}{3}\left(a_{\frac{K+1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(a_{\frac{2J}{2}}\right)^2 = \frac{1}{3}(a_J)^2 \underset{\text{Por HI y } J \leq K}{=} \frac{1}{3}(2^J \cdot 3^{0})^2$

$\Rightarrow \frac{1}{3}(2^J \cdot 3)^2 = \frac{1}{3} 2^{2J} 3^2 = 3 \cdot 2^{2J} \underset{\text{Por definicion}}{=} \boxed{3 \cdot 2^{K+1}}$ Como se quería probar

Veamos el caso base

$n = 0$

$a_0 = 3 \qquad 3 \cdot 2^0 = 3 \Rightarrow \boxed{3 = 3}$

Finalmente, queda demostrado que $\forall n \in \mathbb{N}_0$ vale que $a_n = 3 \cdot 2^n$

④ $(a:b) = 7 \Rightarrow a = 7a'$ y $b = 7b'$ con $a' \perp b'$

$(15a^2 - 9b + 27 : 189) \Leftrightarrow (15 \cdot 7 \cdot a'^2 - 9 \cdot 7 \cdot b' + 27 : 3^3 \cdot 7)$

Probemos suerte con los divisores de 189.

$Div_+(189) = \{1, 3, 9, 27, 7, 21, 63, 189\}$

Caso 3

$\underbrace{15 \cdot 7a'^2}_{\equiv 0} - \underbrace{9 \cdot 7b'}_{\equiv 0} + \underbrace{27}_{\equiv 0} \equiv 0\ (3) \Leftrightarrow 0 \equiv 0\ (3)$

El 3 siempre divide, lo que descarta al 1 como posible divisor.

Caso 9

$$\underbrace{15\cdot 7a'^2}_{\equiv 6a'^2}-\underbrace{9\cdot 7b'}_{\equiv 0}+\underbrace{27}_{\equiv 0}\equiv 0\ (9) \iff 6a'^2\equiv 0\ (9)$$

Tabla de restos

a'	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a'^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$6a'^2$	0	6	6	0	6	6	0	6	6

Con $a'\equiv 0\ (9)$, $a'\equiv 3\ (9)$ o $a'\equiv 6\ (9)$ se satisface la ecuacion.

Por comodidad, el $a'\equiv 0,3,6\ (9)$ lo tomo como $a'\equiv 0\ (3)$

Caso 27

$$\underbrace{15\cdot 7a'^2}_{\equiv 24}-\underbrace{9\cdot 7b'}_{\equiv 9}+\underbrace{27}_{\equiv 0}\equiv 0\ (27) \iff 24a'^2-9b'\equiv 0\ (27)$$

Sabemos que $a'\equiv 0\ (3) \Rightarrow a'=3K$

$$\underset{8\cdot 3}{24}a'^2-9b'\equiv 0\ (27) \iff 8\cdot 3(3K)^2-9b'\equiv 0\ (27) \iff \underbrace{8\cdot 3\cdot 3^2K^2}_{\equiv 0}-9b'\equiv 0\ (27)$$

$$\Rightarrow \underbrace{8\cdot 3^3K^2}_{\equiv 0}-9b'\equiv 0\ (27) \iff -9b'\equiv 0\ (27) \iff 18b'\equiv 0\ (27)$$

$$18b'\equiv 0\ (27) \overset{/9}{\iff} \underbrace{2}_{\equiv -1}b'\equiv 0\ (3) \iff -b'\equiv 0\ (3) \iff b'\equiv 0\ (3)$$

Pero hay una contradiccion, ya que $a'\perp b'$ por definicion, entonces no puede ocurrir $a'\equiv 0\ (3)$ y $b'\equiv 0\ (3)$ al mismo tiempo ya que $(a':b')=3$ y $3\neq 1$.

Caso 7

$$\underbrace{15\cdot 7a'^2}_{\equiv 0}-\underbrace{9\cdot 7b'}_{\equiv 0}+\underbrace{27}_{\equiv -1}\equiv 0\ (7) \iff -1\equiv 0\ (7) \leftarrow \text{Absurdo}$$

El 7 nunca puede dividir, lo que descarta todos los multiplos de 7 y, para mi alivio, los demas divisores.

TOMAS
LISAZO

Hoja 3
LU: 1783/21

Finalmente, los unicos mcd posibles son 3 y 9. /

Ejemplos, con $a=7=b$, obtenemos 3 por mcd; si tomamas $a=21$ y $b=7$ obtendremos 9. ✓

(3) $245 = 5 \cdot 7^2$ /

Para que 245 divida, sus factores primos deben dividir tambien. /
Veamos caso por caso.

Caso 5

$$\underbrace{6^{2n}}_{\equiv 1^{2n}} - \underbrace{35n}_{\equiv 0} - 1 \equiv 0\ (5) \iff 1^{2n} - 1 \equiv 0\ (5) \iff 1 - 1 \equiv 0\ (5)$$

$$1^{2n} = (1^2)^n = 1^n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

El 5 siempre divide. /

Caso 7

$$\underbrace{6^{2n}}_{\equiv (-1)^{2n}} - \underbrace{35n}_{\equiv 0} - 1 \equiv 0\ (7) \iff (-1)^{2n} - 1 \equiv 0\ (7) \iff 1 - 1 \equiv 0\ (7)$$

$$(-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

El 7 siempre divide.

Caso 7·5

$$6^{2n} - \underbrace{35n}_{\equiv 0} - 1 \equiv 0\ (35) \iff 6^{2n} - 1 \equiv 0\ (35) \iff 1 - 1 \equiv 0\ (35)$$

$$6^{2n} = (6^2)^n = 36^n \equiv 1^n \equiv 1\ (35)$$

El 35 siempre divide.

si veras si $7^2 \mid 6^{2n} - 35n - 1 \Rightarrow$ como $3 \perp 49$ $\quad 3 \cdot 49 \mid 6^{2n} - 35n - 1$