NO. DE LIBRETA: 601/14 CARRERA: CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Segundo Parcial - 29/11/2014

Ejercicio 1.
Sea $f(x,y) = 4x^2y$ y D la región dada por $D = \{(x,y) : y \geq 0, 8x^2 + y^2 \leq a\}$ donde $a > 0$. Hallar el valor de a para el cual el máximo absoluto de f en D es $\frac{1}{8}$ y determinar los puntos donde se alcanza el máximo.

Ejercicio 2.
a) Sean $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + 2x^3 - 2xy = 1\}$ y $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 + \sin^3 y - x + y = 2\}$. Probar que S_1 define una función implícita $x = \varphi_1(y)$, con $\varphi_1 : U_1 \to V_1$, U_1 entorno del 1 y V_1 entorno del 1. Probar además que S_2 define una función implícita $x = \varphi_2(y)$, con $\varphi_2 : U_2 \to V_2$, U_2 entorno del 0 y V_2 entorno del -2.

b) Sea $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (\varphi_1(x)^2 + y, 5\varphi_2(y)\varphi_1(x))$. Probar que F es localmente inversible en un entorno del punto $(1,0)$.

Ejercicio 3.
Sea

$$I(p) := \int_e^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^3)^{1/p}} dx, \ p \neq 0.$$

Determinar todos los valores de $p > 0$ para los cuales la integral converge.

Ejercicio 4. Calcular la siguiente integral, siendo A el paralelogramo de vértices $(-3,5)$, $(-5,8)$, $(-3,6)$ y $(-5,9)$.

$$\int\int_A \frac{1}{(3x+2y)^2} dxdy.$$

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

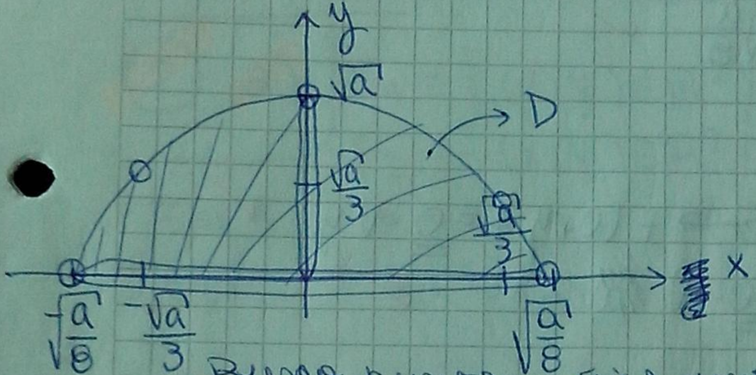
1 $f(x,y) = 4x^2y$

$D = \{(x,y) / y \geq 0 , 8x^2 + y^2 \leq a\}$

$a > 0$

Máx. abs. de f en D $= \frac{1}{8} \rightarrow a?$

Puntos donde $f = \frac{1}{8}$?



Busco puntos críticos dentro de D:

- $\nabla f(x,y) = (8xy, 4x^2)$ ✓

$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 8xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$ ✓

Puntos críticos: son de la forma $(0, y)$ con $0 \leq y \leq \sqrt{a}$ ✓

- En el borde superior de D:

$y = \sqrt{a - 8x^2}$ ✓

$f(x, \sqrt{a-8x^2}) = 4x^2\sqrt{a-8x^2} = g(x)$ ✓

$g'(x) = 4 \cdot \left[2x\sqrt{a-8x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{a-8x^2}} \cdot (-\cancel{16}^{8}x)\right] =$ ✓

$= 8x\sqrt{a-8x^2} - \frac{4 \cdot 8x^3}{\sqrt{a-8x^2}}$ ✓

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \Rightarrow y = \sqrt{a} \longrightarrow (0, \sqrt{a}) \text{ (P.C.)} \\ \cancel{8x}\sqrt{a-8x^2} = \frac{4 \cdot \cancel{8}x^{\cancel{3}2}}{\sqrt{a-8x^2}} \end{cases}$

$\sqrt{a-8x^2} \cdot \sqrt{a-8x^2} = 4x^2$ ✓

$a - 8x^2 = 4x^2 \Rightarrow \overset{12}{9}x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a}{9_{12}}} \text{ o } -\sqrt{\frac{a}{9_{12}}}$ ✓

NOTA

arrastra error de corte

$\left(\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right)$ son P.C. en el borde superior de D.

• En el borde inferior de D:

$y = 0$

$f(x,0) = 0 = g(x) \to g'(x) = 0 \ \forall x$

$\Rightarrow$ los puntos críticos del borde inferior son de la forma $(x,0)$ con $-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{8}} \leq x \leq \sqrt{\frac{a}{8}}$

• Posibles extremos:

sin tachar

* ~~$(0,y)$ con~~ $0 \leq y \leq \sqrt{a} \longrightarrow f(0,y) = \underline{\underline{0}} \ \forall y$
* $(0, \sqrt{a}) \longrightarrow f(0,\sqrt{a}) = \underline{\underline{0}} \ \forall a$
* $\left(\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right)$
* $\left(-\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right)$

sin tachar

* ~~$(x,0)$ con~~ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{8}} \leq x \leq \sqrt{\frac{a}{8}} \longrightarrow f(x,0) = \underline{\underline{0}} \ \forall y$
* $\left(\frac{\sqrt{a}}{8}, 0\right)$ } por su condición de las parametrizaciones
* $\left(-\frac{\sqrt{a}}{8}, 0\right)$ } del borde de D

$f\left(\frac{\sqrt{a}}{8}, 0\right)$ y $f\left(-\frac{\sqrt{a}}{8}, 0\right) = \underline{\underline{0}} \ \forall a$

Como D es un recinto compacto (es cerrado y acotado), y f es continua, f alcanza máximos y mínimos absolutos en D.

$\therefore f\left(\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{1}{8}$ y/o $f\left(-\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{1}{8}$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right) = 4 \cdot \frac{a}{9} \cdot \frac{\sqrt{a}}{3} \\ f\left(-\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right) = 4 \cdot \frac{a}{9} \cdot \frac{\sqrt{a}}{3} \end{array}\right\} = \Rightarrow \frac{4a^{3/2}}{27} = \frac{1}{8}$$

NOTA

$$\sqrt[2]{a^3} = \frac{27}{32} \Longrightarrow \boxed{a = \left(\frac{27}{32}\right)^{2/3}}$$ ✓ arrastra error de cuenta

Se alcanza un máximo absoluto en $\boxed{\left(\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right)}$ y

$\boxed{\left(-\frac{\sqrt{a}}{3}, \frac{\sqrt{a}}{3}\right)}$ con $a = \left(\frac{27}{32}\right)^{2/3}$

2) a) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overset{f(x,y)}{y^4 + 2x^3 - 2xy} = 1\}$, $g(x,y)$

$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2 + \sin^3 y - x + y = 2\}$

En S_1: $x = \varphi_1(y)$ $\quad \varphi_1(1) = 1$

En S_2: $x = \varphi_2(y)$ $\quad \varphi_2(0) = -2$

- Para que exista φ_1: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4 \neq 0$ ✓

Además, φ_1 f cumple las además hipótesis del teorema de la función implícita:

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
-

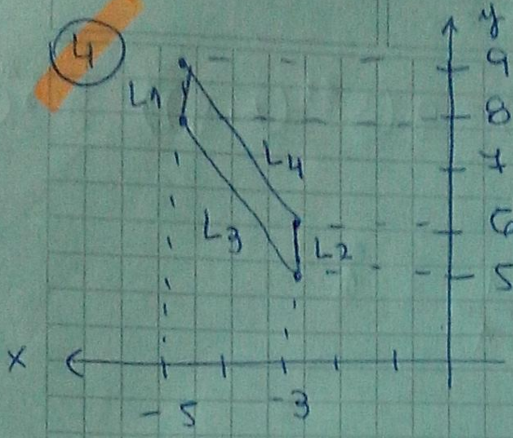
¿cuáles son? Falta verificarlas!

- f es C^1 en un entorno del $(1,1)$
- $(1,1) \in S_1$

HOJA N° 4|4

FECHA

(4)



- L_1: $x = -5$ ✓
- L_2: $x = -3$ ✓
- L_3: $a(-3) + b = 5$

$$\downarrow$$

$$b = 5 + 3a$$

$$a.(-5) + b = 8$$

$$-5a + 5 + 3a = 8$$

$$-2a = 3$$

L_3: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ ✓ $\leftarrow b = \frac{1}{2} \leftarrow a = -\frac{3}{2}$

- L_4: $a.(-3) + b = 6 \rightarrow b = 6 + 3a$

$a.(-5) + b = 9 \rightarrow -5a + 6 + 3a = 9$

$$-2a = 3$$

$\Rightarrow L_4$: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ ✓ $\quad a = -\frac{3}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2}$

- $-5 \leq x \leq -3$ ✓

$$-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$ ✓

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2} \leq y + \frac{3}{2}x \leq \frac{3}{2}$$ ✓

Tomo $u = x \qquad -5 \leq u \leq -3$

$v = y + \frac{3}{2}x \qquad \frac{1}{2} \leq v \leq \frac{3}{2}$

$S(x,y) = (x, y + \frac{3}{2}x) \Rightarrow T(x,y) = S^{-1}(x,y)$

NOTA

• $f(x,y) = \frac{1}{(3x+2y)^2} = \frac{1}{4(y+\frac{3}{2}x)^2}$

Tomo $g(u,v) = \frac{1}{4(v)^2} \Rightarrow f(x,y) = g(S(x,y)) = g\circ S(x,y)$

• $\det T = \frac{1}{\det S} = \frac{1}{\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matriz de S en las bases canónicas}}} = \frac{1}{1} = 1$

• $\iint_A \overbrace{\frac{1}{(3x+2y)^2}}^{f} \, dx\, dy = \int_{-3}^{-2}\int_{3/2}^{1/2} \overbrace{g\circ S}^{f} \circ T(u,v) \cdot |\det T| \, dv\, du$, $\underbrace{S\circ T}_{id.}$ $(S^{-1}=T)$

$= \int\int \frac{1}{4v^2}\cdot 1 \cdot dv\, du = \frac{1}{4}\int_{-3}^{-2}\int_{3/2}^{1/2} \frac{1}{v^2}\, dv\, du =$

$= \frac{1}{4}\int_{-3}^{-2}\left(-\frac{1}{v}\Big|_{3/2}^{1/2} \right) du = \frac{1}{4}\int_{-3}^{-2}\left(-2+\frac{2}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\left(u\Big|_{-3}^{-2}\right) = \boxed{-\frac{1}{3}}$

Arrastra errores con los límites de integración.