Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer parcial (7/10/2023) - 2do C. 2023

TEMA 1

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B / B	B / B	B / B	B	10 (diez)

Apellido: MAZZEI
Nombre: AGUSTÍN

Nro. de libreta: [redacted]
Carrera: Lic. DATOS

Nro de práctica: 4 Te felicito!

ATENCIÓN: Recuerde que para aprobar el examen debe tener dos ejercicios bien.

1. Sea C la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + z^2 - 2x - 4z = 4, \quad y + z = 2.$$

(a) Dar una parametrización de C.

(b) Hallar todos los puntos de C cuyas rectas tangentes sean perpendiculares al plano dado por $x = 1$.

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{yx - 2x}{x^2 + 3(y-2)^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{4\,\mathrm{sen}((x-3)^2)\ln(1+y)}{(x-3)^2 + y^2}$.

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2x^4}{x^4 + 2y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Calcular, si existen, todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente al gráfico de f en el punto $(2, -1, f(2,-1))$ es

$$-5x + y - z = 5.$$

Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(s,t) = (t^2e^s + t^2, 2s + s^4 - 1 - sen(t)s^2)$.

Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de $f \circ g$ en $(0, 1, f \circ g\,(0,1))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

MAZZEI, AGOSTÍN IGNACIO

1) a)

Tengo que C está def. por la intersección de:

$$\begin{cases} y+z=2 \quad ① \\ x^2+z^2-2x-4z=4 \quad ② \end{cases}$$ Intersección del plano con cilindro que se extiende sobre el eje y.

Si completo cuadrados en ② y desarrollo llego a:

$(x-1)^2+(z-2)^2=9$

que puedo parametrizar con $\begin{cases} x=3\cos(\theta)+1 \\ z=3\,\text{sen}(\theta)+2 \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi)$

Luego en ① $y=2-z=2-3\,\text{sen}(\theta)-2=-3\,\text{sen}(\theta)$

La parametrización de C resulta:

$C(t)=(3\cos(t)+1,-3\,\text{sen}(t),3\,\text{sen}(t)+2)$, $t\in[0,2\pi)$ ✓ B

b) Si P es un punto de C tal que el vector director de su recta tangente en P es perpendicular al plano $x=1$

Entonces, el vector director debe ser múltiplo de la normal del plano $x=1$. ✓ Busco la normal:

~~Los~~ $x=1$ son de la forma $(1,y,z)$, $y,z\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow (1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$

Con lo cual la normal está dada por $(0,1,0)\times(0,0,1)$

$=(1,0,0)$. ✓

~~Luego~~ los t que cumplen son $\{t\in[0,2\pi) \,/\, C'(t)=(\alpha,0,0)\}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

$C'(t)=(-3\,\text{sen}(t),-3\cos(t),3\cos(t))$

y $C'(t)=(\alpha,0,0) \iff \begin{cases} -3\,\text{sen}(t)=\alpha \\ -3\cos(t)=0 \\ 3\cos(t)=0 \end{cases} \iff t=\pi/2$ ó $t=3/2\,\pi$ ✓

Con lo cual los puntos de C que cumplen son:
$C(\pi/2) = (1,-3,5)$ y $C(3/2\pi) = (1,3,-1)$.

B

Escaneado con CamScanner

MAZZEI, AGUSTÍN IGNACIO

2) a) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{yx-2x}{x^2+3(y-2)^2}$

Como grado de numerador y denominador es igual, intuyo que no existe el límite.

Pruebo ~~con rectas~~ aproximarme con rectas $y = mx+2$ que si $x\to 0 \Rightarrow y \to 2$.

$\lim_{x\to 0} \frac{(mx+2)x-2x}{x^2+3(mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2+3m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2\cdot 3}$ ✓

Es decir, el valor del límite depende de la pendiente de la recta con la que me acerque.

Luego, su valor no es único y el límite no existe. ✓ (B)

b) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{4\,\text{sen}((x-3)^2)\,\ln(1+y)}{(x-3)^2+y^2}$

Si hago límites iterados:

$\lim_{x\to 3}\lim_{y\to 0} \frac{4\,\text{sen}((x-3)^2)\,\ln(1+y)}{(x-3)^2+y^2} = \lim_{x\to 3} 0 = 0.$ ✓

$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 3}$ " " $= \lim_{y\to 0} 0 = 0$ ✓

Sospecho que el límite existe, voy a acotar a la función y ver si (llamando $f(x,y)$ a la función)

$0 \leq |f(x,y)| \leq g(x,y)$ y que $\lim_{(x,y)\to(3,0)} g(x,y) = 0.$ ✓

$$0 \leq \left| \frac{4 \operatorname{sen}((x-3)^2) \ln(1+y)}{(x-3)^2 + y^2} \right| = \frac{4 |\operatorname{sen}((x-3)^2)| |\ln(1+y)|}{(x-3)^2+y^2}$$

y como $(x-3)^2+y^2 = \|(x-3,y)\|^2$ y $|\operatorname{sen}((x-3)^2)| \leq |(x-3)^2| = (x-3)^2$

$$\leq \frac{4 (x-3)^2 |\ln(1+y)|}{\|(x-3,y)\|^2} \leq \frac{4 \|(x-3,y)\|^2 |\ln(1+y)|}{\|(x-3,y)\|^2}$$

$$= 4 |\ln(1+y)|$$

Entonces ; $0 \leq |f(x,y)| \leq 4 |\ln(1+y)|$

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(3,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(3,0)} 4|\ln(1+y)|$$

$$0 \leq \lim_{\to(3,0)} |f(x,y)| \leq 0$$

$\Rightarrow$ El límite de $f(x,y) \to (3,0)$ existe y es 0.

B

MAZZEI, AGUSTIN IGNACIO

3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2x^4}{x^4+2y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Debo calcular el límite del cociente incremental en $(0,0)$ para un $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ genérico y tal que $\|(a,b)\| = 1$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb) - f(0,0)}{h} = \frac{\dfrac{(hb)^2(ha)^4}{(ha)^4+2(hb)^6}}{h}$$

$$= \frac{h^6b^2a^4}{h(h^4a^4+2h^6b^6} = \frac{h^6(b^2a^4)}{h^5(a^4+2h^2b)} = \frac{hb^2a^4}{a^4+2h^2b}$$ ✓

que tiende a $\frac{0}{a^4}$ si $h \to 0$, entonces si $a \neq 0$ ✓

$\frac{\partial f}{\partial (a,b)} = 0$ ✓

Si $a=0$ entonces $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,hb)}{h} = \frac{(hb)^2 \cdot 0}{2(hb)} = \frac{0}{2h^6b^6} = 0$ ✓

Entonces, los derivadas direccionales de f son 0 $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ✓ B

b) Como f es un cociente de funciones diferenciables entonces serán diferenciables en su dominio natural.

Luego f es dif. en $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ ✓

En $(0,0)$ estudio la diferenciabilidad por def. Teniendo en cuenta que el candidato a plano tangente es $z=0$ por 3) a) ✓

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2x^4}{(x^4+2y^6)\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\left(\frac{x^4}{x^4+2y^6}\right)}_{A} \cdot \underbrace{\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{B} = 0 ?$$

(A) Está acotado entre 0 y 1, basta con ver si
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Es fácil ver que si busco un $\delta > 0 \;/\; \forall \varepsilon > 0$
se da $0 \le \|(x,y)\| \le \delta \Rightarrow \left| \frac{y^2}{\|(x,y)\|} - 0 \right| < \varepsilon$

Entonces $\left| \frac{y^2}{\|(x,y)\|} \right| = \frac{y^2}{\|(x,y)\|} \le \frac{\|(x,y)\|^2}{\cancel{\|(x,y)\|}} = \|(x,y)\|$

y con la hipótesis y tomando $\delta = \varepsilon$ concluye
que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ (A) $\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)}$ (B) $= 0$

y por último, esto me dice que $f(x,y)$ resulta
diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

B

4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que plano tangente en $(2,-1,f(2,-1))$ es $z = -5x + y - 5$. (1)

y sea $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : g(s,t) = (t^2 e^s + t^2, 2s + s^4 - 1 - \operatorname{sen}(t) s^2)$

Me piden calcular la ecuación del plano tangente a $(f \circ g)$ en $(0,1,(f \circ g)(0,1))$.

En primer lugar, $(f \circ g)$ es diferenciable (en todo $\mathbb{R}^2$) pues f lo es y g en sus coordenadas tiene funciones diferenciables, por tanto $(f \circ g)$ es composición de diferenciables ✓

- Luego, el plano tangente a $(f \circ g)$ en $(0,1,(f \circ g)(0,1))$ será $z = (f \circ g)(0,1) + \nabla(f \circ g)^{(0,1)}(x, y-1)$ (2) ✓

donde por regla de la cadena es:

- $\nabla(f \circ g)^{(0,1)} = Df(g(0,1)) \cdot Dg(0,1)$

Como $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $Df = \nabla f$ y además $g(0,1) = (2,-1)$

y usando que (1) es el plano tangente a f en $(2,-1,f(2,-1))$

$f'_x = -5$ ✓ y $f'_y = 1$ ✓

$\Rightarrow \nabla f = (-5,1)$ y $\nabla f(2,-1) = (-5,1)$.

- Calculo Dg y resuelvo $Dg = \begin{bmatrix} t^2 e^s & 2te^s + 2t \\ 2 + 4s^3 - 2\operatorname{sen}(t)s & -\cos(t)s^2 \end{bmatrix}$ ✓

y $Dg(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Entonces $\nabla(f \circ g)(0,1) = (-5\ 1)\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = [-3\ \ 4]$ -20

y como $(f \circ g)(0,1) = -16$

(2) $z = -16 + [-3\ \ 4] \cdot (x, y-1)$. ✓ -20

B