1) a) Para hallar la función $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ primero despejo y de ambas ecuaciones 1

- $y^2 + z^2 = 9$
  $y^2 = 9 - z^2$
  $y = \pm\sqrt{9 - z^2}$
- $-x + y + z = 0$
  $y = x - z$

igualo para obtener la intersección

- si $y = +\sqrt{9 - z^2}$

$$\sqrt{9 - z^2} = x - z$$

Ahora despejo x de esa ecuación así todo me queda en función de z

Luego,

$$x = \sqrt{9 - z^2} + z$$

Luego, tengo que

$$\begin{cases} x = +\sqrt{9-z^2} + z \\ y = +\sqrt{9-z^2} \\ z = z \end{cases}$$

- Si $y = -\sqrt{9-z^2}$

$$-\sqrt{9-z^2} = x - z$$

Despejo x como hice antes

$$x = -\sqrt{9-z^2} + z$$

Luego, tengo que

$$\begin{cases} x = -\sqrt{9-z^2} + z \\ y = -\sqrt{9-z^2} \\ z = z \end{cases}$$

De la fórmula original yo se que

$$y^2 + z^2 = 9$$

Lo cual es la fórmula de una circunferencia de radio 3.
en $\mathbb{R}^2$ de ejes "y" y "z"

Luego, es equivalente a la forma paramétrica

$$(\underbrace{3.\cos\theta}_{y}, \underbrace{3.\operatorname{sen}\theta}_{z})$$

Usando que

$$y = 3 \cdot \cos\theta$$
$$z = 3 \cdot \text{sen}\,\theta$$

y que

$$① \begin{cases} x = -\sqrt{9-z^2} + z \\ y = -\sqrt{9-z^2} \\ z = z \end{cases} \qquad ② \begin{cases} x = \sqrt{9-z^2} + z \\ y = \sqrt{9-z^2} \\ z = z \end{cases}$$

Obtengo que

En ①

$$y = 3 \cdot \cos\theta = -\sqrt{9-z^2}$$
$$z = 3 \cdot \text{sen}\,\theta = z$$
$$x = 3 \cdot \text{sen}\,\theta + 3 \cdot \cos\theta = -\sqrt{9-z^2} + z$$

En ②

$$y = 3 \cdot \cos\theta = \sqrt{9-z^2}$$
$$z = 3 \cdot \text{sen}\,\theta = z$$
$$x = 3 \cdot \text{sen}\,\theta + 3 \cdot \cos\theta = \sqrt{9-z^2} + z$$

Luego, mi función $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es

$$\boxed{r(\theta) = (3 \cdot \text{sen}\,\theta + 3 \cdot \cos\theta,\ 3 \cdot \cos\theta,\ 3 \cdot \text{sen}\,\theta)}$$

— FIN 1.a. —

b) $P = (3,3,0)$ 4

$r(\theta) = (3 \operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta, 3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta)$

El punto $P \in r(\theta)$ cuando $\theta = 0$

$r(0) = (3.\operatorname{sen} 0 + 3\cos 0, 3\cos 0, 3\operatorname{sen} 0) = (3,3,0)$

Para hallar la ecuación de la recta Tangente a C en el punto P debo usar que la recta tangente en $P = r(\theta_0)$ está dada por

$$\lambda \circ \underbrace{r'(\theta_0)}_{\text{vector director}} + \underbrace{r(\theta_0)}_{\text{Punto de paso}}$$

$r'(\theta) = (3.\cos\theta - 3.\operatorname{sen}\theta, -3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta)$

$r'(0) = (3, 0, 3)$

y $r(0) = P = (3,3,0)$

Luego, la recta Tangente esta dada por

$$\boxed{\lambda \circ (3,0,3) + (3,3,0)}$$

— FIN 1.b. —

5

2) Analizar la existencia de los siguientes límites

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^2(y+1)}{x^3+(y+1)^3}$$

Hago los iterados

1)
$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(y+1)}{x^3+(y+1)^3} = \frac{0}{(y+1)^3} = \boxed{0}$$

$$\lim_{y\to -1}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to -1} 0 = \boxed{0}$$

2)
$$\lim_{y\to -1} f(x,y) = \lim_{y\to -1} \frac{x^2(y+1)}{x^3+(y+1)^3} = \frac{0}{x^3} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to -1} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = \boxed{0}$$

Si el límite existe, debería ser 0.
Pruebo por diferentes curvas

si $x = y+1$

$$\lim_{y\to -1} f(y+1,y) = \lim_{y\to -1} \frac{(y+1)^2(y+1)}{(y+1)^3+(y+1)^3} =$$

$$= \lim_{y\to -1} \frac{\cancel{(y+1)^3}}{2\cancel{(y+1)^3}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Luego como me dieron dos límites diferentes acercandome de diferentes formas al $(0,-1)$, el límite no existe

— Fin 2.a —

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,sen(x)}{x^2+y^2}$$

Hago los iterados

①
$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy\,sen(x)}{x^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = \boxed{0}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = \boxed{0}$$

②
$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy\,sen(x)}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = \boxed{0}$$

Si el límite existe, debe ser 0.

Pruebo por diferentes curvas

si $y = x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot sen(x)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} \cdot \underbrace{\frac{sen(x)}{x}}_{\to 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

si $y = mx$, $m \neq 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m x^2 \cdot sen(x)}{x^2(1+m)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}} m}{\cancel{x}(1+m)} \cdot \underbrace{\frac{sen(x)}{x}}_{\to 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot m}{(1+m)} = \frac{0}{1+m} = \boxed{0}$$

Sospecho, entonces, que lim de $f(x,y)$ con $(x,y) \to (0,0)$ es igual a 0.

Lo demuestro.

Sea $\varepsilon > 0$. Se busca determinar $\delta > 0$ tal que $0 \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Entonces $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

$$\left| \frac{x y \operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x y \operatorname{sen}(x)|}{|x^2+y^2|} = \frac{|x| \cdot |y| \cdot |\operatorname{sen}(x)|}{|x^2+y^2|} \quad \to \leq |x|$$

$$\leq \frac{|x| \cdot |y| \cdot |x|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{\|(x,y)\|^{\cancel{3}}}{\cancel{\|(x,y)\|^2}} < \delta \leq \varepsilon$$

Entonces, alcanza tomar $\delta = \varepsilon$ para asegurar que $|f(x,y)| < \varepsilon$

Luego, el límite de $\dfrac{x y \operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2}$ con $(x,y) \to (0,0)$ existe y vale 0

—Fin 2.b.—

3) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+27y^3} = (x^3+27y^3)^{\frac{1}{3}}$

a) Calculo las derivadas parciales en $(0,0)$ por definición

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = \boxed{1}$$

C.A

$f(0,0) = 0$

$f(h,0) = \sqrt[3]{h^3} = h$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = \boxed{3}$$

C.A

$f(0,0) = 0$

$f(0,h) = \sqrt[3]{27h^3} = 3h$

Luego, las derivadas parciales en $(0,0)$ existen y valen

$$\begin{cases} f_x(0,0) = 1 \\ f_y(0,0) = 3 \end{cases}$$

— Fin 3.a —

b) Para que f sea diferenciable en (0,0) debe ocurrir que

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existan y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$= 0$

ya vi que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen y valen respectivamente 1 y 3.

C.A
$f(0,0)=0$

Calculo el límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\sqrt[3]{x^3+27y^3}-0-x-3y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ le llamo $g(x,y)$

Hago los iterados

① $\lim_{x\to 0} g(x,y) = \frac{|\sqrt[3]{27y^3}-3y|}{\sqrt{y^2}} = \frac{|3y-3y|}{|y|} = \frac{0}{|y|} = \boxed{0}$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim g(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = \boxed{0}$

② $\lim_{y\to 0} g(x,y) = \frac{|\sqrt[3]{x^3}-x|}{\sqrt{x^2}} = \frac{|x-x|}{|x|} = \frac{0}{|x|} = \boxed{0}$

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = \boxed{0}$

10

Pruebo por la curva $x=y$

$$\lim_{y\to 0} g(y,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\left|\sqrt[3]{y^3+27y^3} - y - 3y\right|}{\sqrt{y^2+y^2}} =$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\left|\sqrt[3]{28y^3} - 4y\right|}{\sqrt{2y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\left|\sqrt[3]{28}\cdot y - 4y\right|}{\sqrt{2}\cdot|y|}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\left|(\sqrt[3]{28} - 4)\cdot y\right|}{\sqrt{2}\cdot|y|} = \lim_{y\to 0} \frac{\left|(\sqrt[3]{28}-4)\right|\cdot \cancel{|y|}}{\sqrt{2}\cdot \cancel{|y|}}$$

$$= \frac{\left|\sqrt[3]{28} - 4\right|}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Luego, el límite de $g(x,y)$ no existe.

Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

—Fin 3.b.—

4) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente en el punto $(1, 4, f(1,4))$ es

$$z = 3x - 2y + 7$$

Sean $x = g(s,t) = s^2 \cos(t)$ e $y = h(s,t) = (2s+t)^2$

y sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(s,t) = f(g(s,t), h(s,t))$

a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial s}(-1,0)$ y $\frac{\partial F}{\partial t}(-1,0)$

La ecuación del plano tangente es

$$z = f(P) + f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0)$$

Del plano que me dan puedo despejar $f(1,4)$, $f_x(1,4)$, $f_y(1,4)$

$$3x - 2y + 7 = f(1,4) + f_x(1,4)(x-1) + f_y(1,4)(y-4)$$

$$3x - 2y + 7 = a + b(x-1) + c(y-4)$$

$$3x - 2y + 7 = a + bx - b + cy - 4c$$

$$7 = a - b - 4c$$

$$3\cancel{x} = b\cancel{x} \Rightarrow b = 3$$

$$-2\cancel{y} = c\cancel{y} \Rightarrow c = -2$$

$$7 = a - 3 - 4.(-2)$$

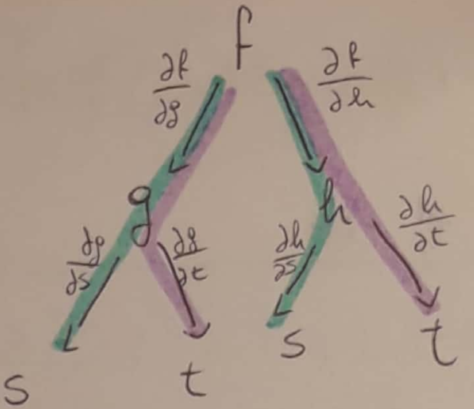
$$7 = a + 5$$

$$\boxed{2 = a}$$

$$f(1,4) = 2$$

$$f_x(1,4) = 3$$

$$f_y(1,4) = -2$$



$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial s}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 2s.\cos(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial g}{\partial s}(-1,0) = -2$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} = 4(2s+t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial h}{\partial s}(-1,0) = -8$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -s^2 \sin t \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial g}{\partial t}(-1,0) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 2.(2s+t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial g}{\partial t}(-1,0) = -4$$

Luego, como $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$

$$\frac{\partial f}{\partial g}(-1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,4) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial h}(-1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,4)$$

pues

$$F(-1,0) = f\left((-1)^2 \cos 0, (2.(-1)+0)^2\right) = f(1,4)$$

Entonces

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial F(-1,0)}{\partial s} = 3.(-2) + (-2).(-8) = 10 \\ \dfrac{\partial F(-1,0)}{\partial t} = 3.\ 0 + (-2).\ 4 = -8 \end{cases}}$$

— Fin 4.a.—

b) Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de F en $(-1, 0, F(-1,0))$

$$w = F(-1,0) + F_s(-1,0)(s+1) + F_t(-1,0).(t-0)$$

$$w = f(1,4) + 10.(s+1) + (-8).(t-0)$$

$$w = 2 + 10s + 10 - 8t$$

$$\boxed{w = 10s - 8t + 12}$$

↳ w es el plano tangente al gráfico de F en $(-1, 0, F(-1,0))$

— Fin 4.b.—