Muy bien!!

Tema 4

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	B-	A

APELLIDO Y NOMBRE: Leclercq Gabriel Aimé
NRO. DE LIBRETA: 693/19 CARRERA: Cs. de la Computación
TURNO: ☐ 8-11 (A-K) ☐ 8-11 (L-Z) ■ 14-17 ☐ 20-22 LuMiJu ☐ 20-22 MaMiVi

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

2do. cuatrimestre 2019

Primer Parcial - 05/10/2019

1. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de

$$A = \left\{ \left(\frac{4n-3}{4n+5}\right)^{(-1)^{n+1}} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Decidir si la siguiente función es continua en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(y^2)\,\mathrm{sen}(y^3 + 3^y x^2 y)}{x^2 + |x+1|y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sqrt{|x|}\,\mathrm{sen}(4x+y)}{x^2 + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de f en el origen.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $x + 2y + 3z = 5$ es la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, -1, f(1,-1))$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = f(x - y^2, xy - x).$$

Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, 0, g(1,0))$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del exámen.
Justifique todas sus respuestas.

Gabriel Lacieiq

10,5 4/4

Parcial de Analisis matematico II (C)

(1)
$$A = \left\{ \left(\frac{4n-3}{4n+5} \right)^{(-1)^{n+1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

- He de Hallar, si existen, sup, inf, min y max de A.

- Ya que A es un conjunto definido por una Sucesión, voy a dividir el conjunto en dos subconjuntos con dos subsucesiones [redacted]. definidas a ellos.

$A = A_1 \cup A_2$ donde $A_1 = \left\{ \left(\frac{8k-3}{8k+5} \right)^{(-1)^{2k+1}} \; k \in \mathbb{N} \right\}$ (*)

(*) $\left(\frac{8k-3}{8k+5} \right)^{(-1)^{2k+1}} = \frac{8k+5}{8k-3}$ 2k+1 siempre es impar

$A_2 = \left\{ \left(\frac{8k-7}{8k+1} \right)^{(-1)^{2k}} : k \in \mathbb{N} \right\}$

$\left(\frac{8k-7}{8k+1} \right)^{(-1)^{2k}} = \frac{8k-7}{8k+1}$ siempre 2k es par

- Entonces, de existir max, min, sup e inf...

$$\inf(A) = \min\{\inf A_1 ; \inf A_2\}$$

$$\sup(A) = \max\{\sup A_1 ; \sup A_2\}$$ ✓

▶ Analizo A_1:

- pruebo algunos valores,

$A_1 = \left\{ \frac{13}{5} ; \frac{21}{13} ; \frac{29}{21} ; \dots \right\}$ ⟹ Intuyo que es decreciente, así que lo pruebo.
$\simeq 2{,}6$; $\simeq 1{,}61$; $\simeq 1{,}38$

[redacted]

● Defino a la subsucesión que define A_1 como b_k con $k \in \mathbb{N}$ y,

si $\{b_k\}$ A_1 es decreciente,

$$b_k \geq b_{k+1} \iff \frac{8k+5}{8k-3} \geq \frac{8k+13}{8k+5} \iff (8k+5)^2 \geq (8k+13).(8k-3)$$

⟹

$\iff \cancel{64k^2} + \cancel{80k} + 25 \geq \cancel{64k^2} \underbrace{\cancel{-24k + 104k}}_{80k} - 39$

$\iff 25 \geq -39$ ✓

- Es cierto, así que A_1 es decreciente ✓

Luego, como A_1 es decreciente, (3bk)

sé que alcanza su sup en b_1 (si defino la sucesión como b_k)

o sea, $\sup(A_1) = \frac{13}{5} = \max(A_1)$, ya que $\frac{13}{5} \in A_1$ ✓

Ahora, para calcular su ínfimo, como sé que la función es monótona decreciente, si está acotada, la estudio por el lim cuando tiende a ∞, y ese número será mi ínfimo.

entonces, $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{8k+5}{8k-3} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{k \to \infty} \frac{8}{8} = \boxed{1}$

¿está acotada por 1? para que lo sea,

$\frac{8k-5}{8k-3} > 1 \iff \cancel{8k}+5 > \cancel{8k}-3$

$\iff 5 > -3$ ✓

A_1 está acotada inferiormente por el 1.

Concluyo entonces que $\inf(A_1) = 1$ ✓

¿es mín? No, ya que acabo de $\Rightarrow$ demostrar que todo valor de la sucesión es mayor estricto que 1. ✓

- Paso a analizar A_2:

Pruebo algunos valores,

$A_2 = \left\{ \frac{1}{9}; \frac{9}{17}; \frac{17}{25}; \dots \right\}$ Intuyo que es creciente, por lo que lo pruebo.

$\frac{1}{9} \simeq 0{,}11$, $\frac{9}{17} \simeq 0{,}52$, $\frac{17}{25} \simeq 0{,}68$

Defino a la subsucesión que define A_2 como d_k con $k \in \mathbb{N}$,

Para que A_2 sea creciente,

$d_k \leq d_{k+1} \iff \frac{8k-7}{8k+1} \leq \frac{8k+1}{8k+9} \iff (8k-7)\cdot(8k+9) \leq (8k+1)^2$

$\Rightarrow$ Hoja 2

Gabriel Leclercq

$\iff \cancel{64k^2} + \underbrace{72k - 56k}_{16k} - 63 \le \cancel{64k^2} + \cancel{16k} + 1$

$\iff -63 \le 1$ ✓ es válido, por lo que A_2 es creciente.

Al ser creciente, puedo deducir que,

$\inf(A_2) = \min(A_2) = a_1 = \frac{1}{9}$ es mínimo ya que $\frac{1}{9} \in A_2$

Ahora, para calcular el sup de A_2, como A_2 es creciente, se que que si ∃ lim cuando k tiende a infinito, es el límite será mi supremo.

Calculo,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{8k-7}{8k+1} \overset{LH}{=} \lim_{k\to+\infty} \frac{8}{8} = \boxed{1}$$

Deduzco entonces que $\sup(A_2) = 1$ y no es máx ya que $\frac{8k-7}{8k+1} < 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$

¿está acotado por 1?

Para que lo sea,

$\frac{8k-7}{8k+1} < 1$

$\iff \cancel{8k} - 7 < \cancel{8k} + 1$

$\iff -7 < 1$ ✓

A_2 está acotado superiormente por 1

• Ya calculado todo,

· $\sup(A) = \max\{\underbrace{\sup(A_1)}_{\frac{13}{5}}; \underbrace{\sup(A_2)}_{1}\} = \frac{13}{5}$

¿Es máximo? Sí, como $A_1 \subseteq A$, y $\frac{13}{5} \in A_1 \Rightarrow \frac{13}{5} \in A$

$\inf(A) = \min\{\underbrace{\inf(A_1)}_{1}; \underbrace{\inf(A_2)}_{\frac{1}{9}}\} = \frac{1}{9}$

¿Es mínimo? Sí, como $A_2 \subseteq A$ y $\frac{1}{9} \in A_2 \Rightarrow \frac{1}{9} \in A$

Rtas:

$\sup(A) = \max(A) = \frac{13}{5}$

$\inf(A) = \min(A) = \frac{1}{9}$

②

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(y^2)\,\text{sen}\,(y^3+3^y x^2 y)}{x^2+|x+1|\,y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

He de analizar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

· primero, como f es suma, producto, cociente y composición de funciones continuas con denominador distinto de 0 en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, deduzco que f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Ahora, analizo la continuidad en el $(0,0)$.

para que f sea continua en el $(0,0)$,

· $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Entonces, he de probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ si quiero ver que es continua en aquel punto.

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\cos(y^2)\cdot \text{sen}\,(y^3+3^y x^2 y)}{x^2+|x+1|\,y^2}}_{f(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(\cos(y^2))}_{\to 1} \cdot \overbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}\,(y^3+3^y x^2 y)}{x^2+|x+1|\,y^2}}^{?}$$

? pruebo por definición que este límite da 0.

Definición

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{\text{sen}\,(y^3+3^y x^2 y)}{x^2+|x+1|\,y^2} \right| < \varepsilon$

$$\blacktriangle\ \frac{|\text{sen}\,(y^3+3^y x^2 y)|}{\underbrace{|x^2+|x+1|\,y^2|}_{\geq 0}} \overset{|\text{sen}(x)|\leq|x|}{\leq} \frac{|y^3+3^y x^2 y|}{x^2+|x+1|\,y^2} \overset{\text{Desigualdad triangular} = ⊛}{\leq} \frac{|y^3|+|3^y||x^2 y|}{x^2+|x+1|\,y^2} \underset{(a)}{\overset{\text{si } \delta<\delta_0}{\leq}} \frac{|y^3|+|3^y||x^2 y|}{x^2+\frac{1}{2}\,y^2} =$$

$\underline{(a)}$ Como $|x+1| \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $-\varepsilon+1 < |x+1| < \varepsilon+1$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_0>0 \ /\ |x|<\delta_0 \Rightarrow ||x+1|-1| < \varepsilon$

escojo $\varepsilon = 1/2$, $\frac{1}{2} < |x+1| < \frac{3}{2}$

⊛ $|t+u| \leq |t|+|u|$

$\Rightarrow$ Hoja 3

Gabriel Lecler[illegible]

$$= \frac{|y^3| + |3^y|\,|x^2 y|}{x^2 + \frac{1}{2}y^2} \underset{(2_y)}{\overset{\delta \leq 1}{\leq}} \frac{|y^3| + 3.\,|x^2 y|}{x^2 + \frac{1}{2}y^2} \leq \frac{|y^3| + 3.\,|x^2 y|}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \frac{2|y^3| + 6\,|x^2 y|}{\|(x,y)\|^2} \leq$$

(2_y): $|y| < 1$

$\Longleftrightarrow -1 < y < 1$ } Como 3^x es creciente se mantiene la desigualdad.

$\Longleftrightarrow \frac{1}{3} < 3^y < 3$

$$\underset{|x|\leq\|(x,y)\|}{\overset{|y|\leq\|(x,y)\|}{\leq}} \frac{2\,\|(x,y)\|^3 + 6\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = 8\,\|(x,y)\| < \ldots$$

Necesito que $< 8\delta < \varepsilon$

Entonces, escojo $\delta < \min\{\delta_0;\ 1;\ \frac{\varepsilon}{8}\}$ y probé que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{Sen}(y^3+3^y x^2)}{x^2+\mathrm{Log}(\ldots)y^2} = 0$

Por lo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, entonces f es continua en el $(0,0)$

R/a: f es continua en $\mathbb{R}^2$

(3) He de analizar si la función f es diferenciable en el origen.

Empiezo calculando las derivadas parciales.

- $$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f((0,0)+(t,0))}^{f(t,0)} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{t} = \frac{0}{t^3} = \boxed{0}$$
- $$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f((0,0)+(0,t))}^{f(0,t)} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{t} = \frac{0}{3t^3} = \boxed{0}$$

Con las derivadas parciales calculadas, analizo la diferenciabilidad en el origen.

Para que f sea diferenciable en el origen,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \overbrace{f_x(0,0)}^{=0}.x - \overbrace{f_y(0,0)}^{=0}.y}{\|(x,y)\|} = 0$$

$\Longrightarrow$

Gabriel Cecleria

$$= \frac{|y^3| + |3^y|\,|x^2 y|}{x^2 + \frac{1}{2}y^2} \underset{(\omega_2)}{\overset{\text{Si } \delta < 1}{\leq}} \frac{|y^3| + 3.\,|x^2 y|}{x^2 + \frac{1}{2}y^2} \leq \frac{|y^3| + 3.\,|x^2 y|}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \frac{2|y^3| + 6.\,|x^2 y|}{\|(x,y)\|^2} \leq$$

(ω_2):

$|y| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < y < 1$ } Como 3^x es creciente se mantiene la desigualdad.

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < 3^y < 3$

$|y| \leq \|(x,y)\|$
$|x| \leq \|(x,y)\|$

$$\leq \frac{2.\,\|(x,y)\|^3 + 6\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = 8\,\|(x,y)\| <$$

Además quiero $< 8\delta < \varepsilon$

Entonces, escojo $\delta < \min\{\delta_0;\ 1;\ \frac{\varepsilon}{8}\}$ y probé que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{Sen}(y^3 + 3^y x^2 y)}{x^2 + \frac{1}{2} y^2} = 0$

Por lo que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, entonces f es continua en el $(0,0)$

R/a: f es continua en $\mathbb{R}^2$

3 He de analizar si la función f es diferenciable en el origen.

Empiezo calculando las derivadas parciales.

- $$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f((0,0)+(t,0))}^{f(t,0)} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{t} = \frac{0}{t^3} = \boxed{0}$$

- $$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f((0,0)+(0,t))}^{f(0,t)} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{t} = \frac{0}{3t^3} = \boxed{0}$$

Con las derivadas parciales calculadas, analizo la diferenciabilidad en el origen.

Para que f sea diferenciable en el origen,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \overbrace{f_x(0,0)}^{=0}.x - \overbrace{f_y(0,0)}^{=0}.y}{\|(x,y)\|} = 0$$

$\Rightarrow$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sqrt{|x|}\,\operatorname{sen}(4x+y)}{(x^2+3y^2)(\|(x,y)\|)} = 0$$

Pruebo ese límite por definición.

Def: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{y^2\sqrt{|x|}\,\operatorname{sen}(4x+y)}{(x^2+3y^2).(\|(x,y)\|)}\right| < \epsilon$

$$\left|\frac{y^2 \cdot \overbrace{|x|^{1/2}}^{\geq 0} \cdot |\operatorname{sen}(4x+y)|}{(x^2+3y^2).(\|(x,y)\|)}\right| = \frac{|y^2|.|x|^{1/2}\,|\operatorname{sen}(4x+y)|}{(x^2+3y^2).(\|(x,y)\|)} \leq$$

$|\operatorname{sen}(t)| \leq |t|$ ≥ 0 ~~[illegible]~~

$\frac{1}{3} < \frac{1}{1}$

desigualdad triangular: $|t+u| \leq |t|+|u|$

$$\leq \frac{|y^2|.|x|^{1/2}.|4x+y|}{(x^2+3y^2).(\|(x,y)\|)} \leq \frac{|y^2x^{1/2}.4x + y^2x^{1/2}.y|}{(x^2+y^2).(\|(x,y)\|)} \leq \frac{|y^2 x^{1/2} 4x| + |y^2 x^{1/2} y|}{\|(x,y)\|^3}$$

$|y| \leq \|(x,y)\|$, $|x| \leq \|(x,y)\|$

$$\leq \frac{4.\|(x,y)\|^3\|(x,y)\|^{1/2} + \|(x,y)\|^3\|(x,y)\|^{1/2}}{\|(x,y)\|^3} = 5\|(x,y)\|^{1/2}$$

$\|(x,y)\| < \delta$, quiero $< 5\sqrt{\delta} < \epsilon$

Entonces, con $\delta < \left(\frac{\epsilon}{5}\right)^2$ es válido y probé que lim tiende a 0.

Por lo que,

Rta: f es diferenciable en el origen.

$\Rightarrow$ Hoja 4

Gabriel Cellerino

④ He de hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1,0,g(1,0))$.

- Primero, comienzo observando que como $g(x,y)=f(x-y^2;\ xy-x)$,

$g(1,0) = f(1-0^2;\ 1.0-1) = f(1,-1)$

o sea que voy a poder obtener la ecuación del plano tangente de g en $(1,0)$ a través de f.

Bueno, para armar el plano tangente, necesito:

① $g(1,0)$ y ② $\nabla g(1,0)$

① Esto se puede calcular mirando $f(1,-1)$ ya que $g(1,0)=f(1,-1)$, entonces saco esta info. a partir del plano tangente de f:

$x+2y+3z=5 \iff 3z=5-x-2y \iff z=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y$

evalúo en el $(1,-1)$, que lo puedo hacer porque el plano z es tangente a f en el $(1,-1)$:

$g(1,0)=f(1,-1)=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\boxed{2}$ ✓

② Para calcular esto, voy a definir $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, donde

$h(x,y)=(x-y^2;\ xy-x)$

entonces, $g(x,y)=f\circ h(x,y)$

Si aplico diferencial

- $\nabla g(x,y) = D_{f\circ h}(x,y)$

Aplico regla de la cadena, ¿f y h son C^1?

$D_{f\circ h}(x,y) = Df(h(x,y)) \cdot Dh(x,y)$

evaluado en el $(1,0)$... $D_{f\circ h}(1,0)=\underbrace{\nabla f(1,-1)}_{\text{tengo el plano tangente de f pero calculado}}\cdot\underbrace{Dh(1,0)}_{\text{lo calculo}}$

$\nabla f(1,-1)$:

- Tengo el plano $z = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$,

Aunque este plano no está definido de la forma $z = f(1,-1) + f_x(1,-1)\cdot(x-1) + f_y(1,-1)\cdot(y+1)$, yo puedo ver a ojo $f_x(1,-1)$ y $f_y(1,-1)$, y están definidos por,

Podrías hacer alguna cuenta más

$f_x(1,-1) = -\frac{1}{3}$ y $f_y(1,-1) = -\frac{2}{3}$

Por lo que, $\nabla f(1,-1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$Dh(1,0) = \left.\begin{pmatrix} 1 & -2y \\ y-1 & x \end{pmatrix}\right|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\nabla g(1,0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Así el plano tangente,

$$\boxed{\Pi_T: \ z_1 = 2 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{3}y}$$

Gabriel Leclercq