TEMA C

1	2	3	4	Calificación
B | B	M	B | B	B	Ap.

Apellido y Nombre:
Nro. de libreta:

Turno: TARDE
Carrera: Lic. Cs. Matemáticas

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2019

Primer Parcial - 11/05/2019

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

1. Calcular, si existen, los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^4y - \operatorname{sen}(xy^2)}{2x^2+y^2}$,

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^3+y^2}{2x^3+x^2-y}$.

2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)^5(y+1)}{2^{x+1}(x+1)^4+(y-1)^2} & \text{si } (x,y)\neq(-1,1),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(-1,1).\end{cases}$$

   Analizar la continuidad de f en (x_0,y_0) para cada $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(e^y-1)(3x^3-2y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   a) Analizar la existencia de las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

   b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(4xe^{x-y},-3y)=3y+e^{x+1}$.

   a) Hallar el plano tangente al gráfico de f en $(0,3,f(0,3))$.

   b) Hallar todas las direcciones $v\in\mathbb{R}^2$, $\|v\|=1$, en las que $\frac{\partial f}{\partial v}(0,3)=0$.

① a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^4y - \text{sen}(xy^2)}{2x^2+y^2}$

suponemos que el límite da cero y tratamos de acotar

$$0 < \left|\frac{3x^4y - \text{sen}(xy^2)}{2x^2+y^2}\right| = \frac{|3x^4y - \text{sen}(xy^2)|}{|2x^2+y^2|} \leq$$

• Como $|\underbrace{2x^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 0}| = 2x^2+y^2 = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 0} \geq x^2+y^2$

Ojo: $a<b$ NO implica $|a|<|b|$. Para acotar el denom deberías sacar el módulo primero

• Entonces: $\leq \dfrac{|3x^4y - \text{sen}(xy^2)|}{|x^2+y^2|} = \dfrac{|3x^4y - \text{sen}(xy^2)|}{\|(x,y)-(0,0)\|^2}$

Por desigualdad triangular como $|a-b| \leq |a| + |b|$

$$\leq \frac{|3x^4y| + |\text{sen}(xy^2)|}{\|(x,y)\|^2} = \frac{3|x|^4|y| + |\text{sen}(xy^2)|}{\|(x,y)\|^2} \leq$$

• como (*) $|x| \leq \|(x,y)\|$, $|y| \leq \|(x,y)\|$ y $|\text{sen}(xy^2)| \leq |xy^2| = |x||y|^2$

• Entonces:

$$\leq \frac{3\|(x,y)\|^4\|(x,y)\| + |x||y|^2}{\|(x,y)\|^2}$$

de nuevo usamos (*)

$$\leq \frac{3\|(x,y)\|^5 + \|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2}$$

$$= \frac{\cancel{\|(x,y)\|^2}\left(3\|(x,y)\|^3 + \|(x,y)\|\right)}{\cancel{\|(x,y)\|^2}}$$

✓

$$= 3\|(x,y)\|^3 + \|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

∴ Por Sandwich, el límite existe y es cero.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-x^3+y^2}{2x^3+x^2-y}$

Probamos por curvas:

$y = x^3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^3+(x^3)^2}{2x^3+x^2-x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^3+x^6}{x^3+x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(-x+x^4)}{\cancel{x^2}(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x+x^4}{x+1} = \frac{-0+0^4}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^3+(x^2)^2}{2x^3+x^2-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^3+x^4}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}(-1+x)}{2\cancel{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1+x}{2} = \frac{-1+0}{2} = \frac{-1}{2} \neq 0$$

- Como por distintas curvas el límite nos dio distinto, podemos concluir que no existe el límite.

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^3+y^2}{2x^3+x^2-y}$$

② Para que f sea continua $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vemos los posibles casos:

- Si $(x,y) \neq (-1,1)$ el denominador no se anula y por ser composición, suma, producto y cociente de funciones continuas en todo $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ f es continua en $(x,y) \neq (-1,1)$.

- Ahora bien, veremos el punto crítico que será $(x,y) = (-1,1)$

Debe ocurrir, para que f sea cont. allí, que:

$$f(-1,1) = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y) = 0$$

Probemos por curvas:

la curva debe pasar por $(-1,1)$ entonces probamos:

$$(y-1) = (x+1)^2$$
$$y = (x+1)^2 + 1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^5\left(((x+1)^2+1+1\right)}{2^{x+1}(x+1)^4 + ((x+1)^2)^2}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^5((x+1)^2+2)}{2^{x+1}(x+1)^4+(x+1)^4}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^5((x+1)^2+2)}{(x+1)^4(2^{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)((x+1)^2+2)}{2^{x+1}+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x((x+1)^2+2) + 1((x+1)^2+2)}{2^{x+1}+1}$$

$$= \frac{-2+2}{2} = 0$$

Intentamos probar por definición con candidato cero

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ \text{si } 0 \le \|(x,y) - (-1,1)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

(en este caso $L = 0$)

$$\left| \frac{(x+1)^5 (y+1)}{2^{x+1}(x+1)^4 + (y-1)^2} \right| = \frac{|x+1|^5 \, |y+1|}{|2^{x+1}(x+1)^4 + (y-1)^2|} \le$$

· como $|\underbrace{2^{x+1}}_{\geq 0} \underbrace{(x+1)^4}_{\geq 0} + \underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0}| = 2^{x+1}(x+1)^4 + (y-1)^2 \geq (y-1)^2 = |y-1|^2$

$$\le \frac{|x+1|^5 \, |y+1|}{|y-1|^2}$$

No sirve si $y = 1$

· y como $|y-1| \le \|(x,y) - (-1,1)\| < \delta$

Tomamos $\delta < 1 \Rightarrow |y-1| < 1$

$-1 < y-1 < 1$ ↓ sumo 2

$1 < y+1 < 3$

$|y+1| < 3$

$$\le \frac{3|x+1|^5}{|y-1|^2}$$

· También $|x+1| \le \|(x,y) - (-1,1)\| < \delta$

$$\le \frac{3\|(x,y) - (-1,1)\|^5}{|y-1|^2} = \frac{3\|(x,y) - (-1,1)\|^4}{|y-1|} \cdot \frac{\|(x,y) - (-1,1)\|}{|y-1|} \le$$

· Por desigualdad triangular $|a-b| \geq |a| - |b|$ ¿Es positivo? No necesariamente, podría ser negativo ⇒ no te sirve para acotar.

$|y-1| \geq |y| - |1|$

$$\le \frac{3\|(x,y) - (-1,1)\|^4}{\underbrace{|y| - |1|}} \cdot \frac{\|(x,y) - (-1,1)\|}{\underbrace{|y| - |1|}}$$

y además habíamos tomado $\delta < 1$

$|y-1| < 1$

$-1 < y-1 < 1$

$0 < y < 2$

$|y| \geq 0$

si $a < b$ y $c < 0$ ⇒ $ca > cb$

$$\le \frac{3\|(x,y) - (-1,1)\|^4}{(-|1|)} \cdot \frac{\|(x,y) - (-1,1)\|}{(-|1|)}$$

⇒ $|y| - 1 \geq -1$

cuando pasas dividiendo se podría dar vuelta la desigualdad

$$= 3\|(x,y) - (-1,1)\|^5 < 3\delta^5 < \varepsilon$$

$$\delta < \sqrt[5]{\frac{\varepsilon}{3}}$$

⇒ Tomamos $\delta < \min\left\{1; \sqrt[5]{\frac{\varepsilon}{3}}\right\}$

comprobamos que el límite daba cero

∴ f es continua $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

húsares

$|x+1| \leq \| \quad \| < \delta$

$|y-1| \leq \| \quad \| < \delta$

- Segundo intento del ejercicio 2 (este no está corregido)

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)^5\,(y+1)}{2^{x+1}(x+1)^4 + (y-1)^2} = 0$$

Por definición:

$$2^{x+1}\,(x+1)^4 + (y-1)^2$$

$\delta < 1$

$|x+1| < 1$

$-1 < x+1 < 1$

$\boxed{1 < 2^{x+1}} < 4$

y además

como $\delta < 1 \Rightarrow |y-1| < 1$

$(y-1)^2 \geq (y-1)^4$

$$\Rightarrow \frac{|x+1|^5\,|y+1|}{|1\cdot(x+1)^4 + (y-1)^4|} \leq \frac{|x+1|^5\,|y+1|}{\|(x,y)-(-1,1)\|^4}$$

$(x+1)^4 + (y-1)^4 \geq (x+1)^4 + 2\cdot(x+1)^2(y-1)^2 + (y-1)^4$
$= \|(x,y)-(-1,1)\|^4$

$$\leq \frac{\|(x,y)-(-1,1)\|^{\cancel{5}}\cdot|y+1|}{\cancel{\|(x,y)-(-1,1)\|^4}}$$

como $\delta < 1$

$|y-1| < 1$

$-1 < y-1 < 1$

$1 < y+1 < 3$

$|y+1| < 3$

$\leq \|(x,y)-(-1,1)\|\cdot 3$

$< 3.\delta < \varepsilon \rightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\Rightarrow \delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$$

③ a) Para que existan las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ debe existir y ser cont.:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(a,b)) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$$

Tomamos $\vec{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$ ya que $\|v\|=1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(ha;hb)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(e^{hb}-1)(3h^3a^3 - 2h^2b^2)}{h^2a^2 + h^2b^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\cancel{h^2}(e^{hb}-1)(3ha^3 - 2b^2)}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}} \circledast$$

si $b \neq 0$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{(e^{hb}-1)}{h \cdot b}}_{\to 1}(3ha^3 - 2b^2) \cdot b \quad \text{con } b \neq 0$$

$$= \lim_{h\to 0} 3ha^3b - 2b^3 = 3.0a^3b - 2b^3 = -2b^3$$

$\circledast$ y si $b=0$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}}(e^{hb}-1)3\cancel{h}a^3$

$$= \lim_{h\to 0}(e^{hb}-1)3a^3 = (e^0-1)3a^3 = 0$$

o sea, que podemos mantener la fórmula $-2b^3$

ya que $-2.0^3 = 0$

b) Para analizar diferenciabilidad de f en $(0,0)$

primero calculamos las derivadas parciales en $(0,0)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h;0) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h;0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{(\overbrace{e^0-1}^{=0})(3h^3 - 2 0^2)}{(h^2+0^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0+h) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(e^h-1)(\overbrace{3\cdot 0^3}^{=0} - 2h^2)}{(0^2+h^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{(e^h-1)}{h}}_{\to 1} \cdot \left(\frac{-2\cancel{h^2}}{\cancel{h^2}}\right) = -2$$

Ahora, con estos datos podemos usar una propiedad

si f es diferenciable en $(0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0) ; v \rangle$
y $\|v\| = 1$

En el punto a) sacamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2b^3$ con $v = (a, b)$

$$-2b^3 = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}^{=0} \cdot a + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}^{=-2} \cdot b$$

$$-2b^3 = -2b \quad \text{y esto se cumple} \Leftrightarrow \quad b = 0 \lor b = \pm 1$$

o sea con $v = (\pm 1 ; 0)$
o $v = (0 ; \pm 1)$

y además,
si probamos con el límite de diferenciabilidad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \overbrace{0(x-0)}^{=0} - (-2)(y-0)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0$$

$\longrightarrow$ existir y debe dar cero p/ que sea dif

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^y-1)(3x^3-2y^2)}{(x^2+y^2)\|(x,y)\|} + \frac{2y}{\|(x,y)\|}$$

Probamos por curvas con $y = x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)(3x^3-2x^2)}{(x^2+x^2)^{3/2}} + \frac{2x}{\sqrt{(x^2+x^2)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)(3x^3-2x^2)}{(2x^2)^{3/2}} + \frac{2x}{(2x^2)^{1/2}}$$

húsares

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(e^x - 1)(3x^3 - 2x^2)}{(2^{3/2})\, x^3} + \frac{2x}{\sqrt{2} \cdot x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \overset{1}{\frac{(e^x - 1)}{x}} \, \frac{(3x^3 - 2x^2)}{(2^{3/2})\, x^2} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x^2}(\overset{0}{3x} - 2)}{\cancel{x^2}\,(2^{3/2})} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2^3}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$\Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$

④ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable (por consigna)

y vemos $f(4xe^{x-y}; -3y) = 3y + e^{x+1}$

Debemos hallar el plano tg a f en $(0,3,f(0,3))$

$$\pi: \quad z = f(0,3) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,3)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3)(y-3)$$

- Podemos llamar g a la función:

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;/\; g(x,y) = (4xe^{x-y}; -3y)$

y esta función g será diferenciable por ser composición de funciones diferenciables sus dos coordenadas.

- Luego, sabemos que $(f \circ g)(x,y) = 3y + e^{x+1}$

$f(g(x;y)) = f(4xe^{x-y}; -3y) = 3y + e^{x+1}$ ok.

- Ahora bien, como f y g son diferenciables $\Rightarrow f \circ g$ será diferenciable y por regla de la cadena

$$D(f \circ g)(x,y) = Df(g(x,y)) \cdot Dg(x,y)$$

- Queremos que $f(g(x,y)) = f(0,3)$

$$g(x,y) = (0;3)$$

$$4xe^{x-y} = 0 \quad \wedge \quad -3y = 3$$

$$4xe^{x+1} = 0 \qquad\qquad y = -1$$

$$x = 0$$

$\Rightarrow \quad D(f\circ g)(0;-1) = Df(g(0;-1)) \cdot Dg(0;-1)$ Ⓐ

$$\underbrace{D(f\circ g)(0;-1)}_{\in \mathbb{R}^{1\times 2}} = \underbrace{Df(0;3)}_{\in \mathbb{R}^{1\times 2}} \cdot \underbrace{Dg(0,-1)}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}}$$

- $Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 4e^{x-y} + 4xe^{x-y} & -4xe^{x-y} \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow Dg(0;-1) = \begin{pmatrix} 4e^{0+1} + \overbrace{4.0e^{0+1}}^{=0} & 0^{(*)} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(*) CA $\quad -4 \cdot 0 \cdot e^{0+1} = 0$

- $D(f\circ g)(x;y) = \begin{pmatrix} e^{x+1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D(f\circ g)(0,-1) = \begin{pmatrix} e & 3 \end{pmatrix}$

{ usamos (A)

$$\begin{pmatrix} e & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,3) & -3\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \end{pmatrix}$$

$$\cancel{e} = 4\cancel{e}\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,3) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) = \frac{1}{4}$$

$$\cancel{3} = -\cancel{3}\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) = -1$$

- nos falta $f(0,3) = f(g(0,-1)) = (f\circ g)(0,-1)$

$$(f\circ g)(0,-1) = 3(-1) + e^{0+1}$$
$$= -3 + e$$

$\Rightarrow$ Plano : π : $z = -3 + e + \frac{1}{4}(x-0) - 1\,(y-3)$

$$z = -\cancel{3} + e + \frac{1}{4}x - y + \cancel{3}$$

$$\boxed{z = e + \frac{1}{4}x - y}$$

b) $v \in \mathbb{R}^2 \;/\; \|v\| = 1 \;/\; \frac{\partial f}{\partial v}(0,3) = 0$

como f es diferenciable $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,3) = \langle \nabla f(0,3) ; v \rangle$
y además $\|v\| = 1$

$\Rightarrow 0 = \langle \nabla f(0,3) ; v \rangle$ llamaremos $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) \cdot V_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \cdot V_2$$

$$0 = \frac{1}{4} \cdot V_1 + (-1)\, V_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} V_1 = V_2$$ y como $V_1^2 + V_2^2 = 1$

$$V_1^2 + \left(\frac{1}{4} V_1\right)^2 = 1$$

$$V_1^2 + \frac{1}{16} V_1^2 = 1$$

$$\frac{17}{16} V_1^2 = 1$$

$$V_1^2 = \frac{16}{17}$$

$$|V_1| = \frac{4}{\sqrt{17}} \Leftarrow |V_1| = \sqrt{\frac{16}{17}}$$

$$V_1 = \frac{4}{|\sqrt{17}|} \qquad V_1 = \frac{-4}{|\sqrt{17}|}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$V_2 = \frac{1}{|\sqrt{17}|} \qquad V_2 = \frac{-1}{|\sqrt{17}|}$$

$\Rightarrow$ las direcciones que cumplen son:

$$V = \left(\frac{4}{\sqrt{17}} ; \frac{1}{\sqrt{17}}\right) \text{ y } V = \left(\frac{-4}{\sqrt{17}} ; \frac{-1}{\sqrt{17}}\right)$$