Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

2do. cuatrimestre 2020

Simulacro del Primer Parcial - 14/10/2020

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

Ejercicio 1: Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene como la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 - z = 0 \qquad y \qquad x^2 - 4x + y^2 + z = 0$$

(a) Hallar una función $r(t)$ cuya imagen describa la curVa $\mathcal{C}$

(b) Verificar que el punto $P = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \sqrt{2})$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P

Ejercicio 2: Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)^2 \operatorname{sen}(x^2) y}{x^2 + y^4}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$.

Ejercicio 3: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2 - \operatorname{sen}(x^4)}{x^2 + \frac{1}{3}y^2} + 2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hallar, si es posible, un valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x,y)$ sea continua en todo $\mathbb{R}^2$. ¿Es f diferenciable para algún a?

Ejercicio 4: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que el plano tangente a su gráfico en el punto $(1, 2, f(1,2))$ es

$$-x - 2y + z = -1.$$

Si $x = 3s + t^2$ e $y = 2s^2 + 2t$ y definimos $F(s,t) = f(x,y)$, calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de F en el punto $(0, 1, F(0,1))$.

SIMULACRO 1er PARCIAL (Mié 14/10/20)

Ej 1 ⓐ Queremos buscar la curva que está en la intersección de las superficies:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 & \text{(ec1)} \\ z = -x^2 - y^2 + 4x & \text{(ec2)} \end{cases}$$

Restando las ecuaciones: (ec1) − (ec2):

$0 = 2x^2 + 2y^2 - 4x$; o bien:

$0 = x^2 - 2x + y^2$; sumo 1 a ambos lados:

$1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$, completo cuadrados

$1 = (x-1)^2 + y^2$ lo cual representa una circunferencia de radio 1 centrada en (1,0) si lo vemos en el "plano del piso" $z = 0$. Usando coordenadas polares: $\begin{cases} x - 1 = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$

Luego tenemos $x = 1 + \cos t$; $y = \operatorname{sen} t$.

Usando (ec1): $z = x^2 + y^2 = (1 + \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2$

$$z = 1 + 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{=1}$$

Obtenemos: $\begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \\ z(t) = 2 + 2\cos t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

La parametrización buscada es : $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$r(t) = (x(t) ; y(t) ; z(t))$

ⓑ $P = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} ; 2 - \sqrt{2}\right) \in \mathcal{C}$ si hay algún t de modo que $r(t) = P$.

Queremos que $\frac{\sqrt{2}}{2} = y = \operatorname{sen} t$ con lo cual $t = \pi/4$ o bien $t = \frac{3\pi}{4}$; Pero si $t = \pi/4$, $x(\pi/4) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ no nos sirve.

Con $t_0 = \frac{3}{4}\pi$ vale que $r(3/4\,\pi) = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} ; 2-\sqrt{2}\right) = P$

La ecuación paramétrica de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P es:

$$(x,y,z) = \lambda\, r'(3/4\,\pi) + r(3/4\,\pi)$$

Con $r'(t) = (-\text{sen}t ; \cos t , -2\,\text{sen}t)$, luego:

$$r'(3/4\,\pi) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\sqrt{2}\right)$$

La recta es: $\boxed{(x,y,z) = \lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2} , -\sqrt{2}\right) + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} , 2-\sqrt{2}\right)}$

Ej 2 ⓐ Después de probar por diversas curvas que pasan por el origen ($x=0$; $y=mx$, $y=x^2$, $x=y^2$, ...) nos "convencemos" que ese límite podría estar dando cero. Probémoslo:

$$0 \leq \left|\frac{(x-1)^2\,\text{sen}(x^2)\,y}{x^2+y^4}\right| = \frac{(x-1)^2\,|\text{sen}\,x^2|\,|y|}{x^2+y^4} \leq$$

$|\text{sen}\,t| \leq |t| \quad \forall t$

$$\leq \frac{(x-1)^2\,x^2\,|y|}{x^2+y^4} \leq (x-1)^2\,|y|$$

≤ 1

como $y^4 \geq 0$, entonces:

$x^2 \leq x^2+y^4$ con lo cual:

$$\frac{x^2}{x^2+y^4} \leq 1$$

Luego:

$$\underset{\substack{\downarrow (x,y)\to(0,0) \\ 0}}{0} \leq \left|\frac{(x-1)^2\,\text{sen}(x^2)\,y}{x^2+y^4}\right| \leq \underbrace{(x-1)^2\,|y|}_{\substack{\downarrow (x,y)\to(0,0) \\ 1\cdot 0 = 0}}$$

Por Sandwich vale que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{(x-1)^2\,\text{sen}(x^2)\,y}{x^2+y^4}\right| = 0$$

NOTA

Con lo cual: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-1)^2 \operatorname{sen} x^2 \, y}{x^2+y^4} = 0$

(b) Probemos acercándonos al origen por curvas para $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$

Tomo la recta $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^0-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Candidato a límite: $L=0$

Tomo la recta $y=x$ $\quad \frac{0}{0}$ Uso L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cancel{2x}}{2\cdot 2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

Candidato a límite: $L = 1/2$

Luego: el límite propuesto no existe.

$\boxed{\text{Ej 3}}$ Llamemos $g(x,y) = \dfrac{x^2y^2 - \operatorname{sen}(x^4)}{x^2+\frac{1}{3}y^2}$. Probando por varios curvas que pasan por el origen sospechamos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Probémoslo:

Desigualdad triangular

$$0 \leq |g(x,y)| = \frac{|x^2y^2 - \operatorname{sen}(x^4)|}{x^2+\frac{1}{3}y^2} \leq \frac{x^2y^2 + |\operatorname{sen} x^4|}{x^2+\frac{1}{3}y^2} \leq$$

$$\leq \frac{x^2y^2 + x^4}{x^2+\frac{1}{3}y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+\frac{1}{3}y^2}}_{\leq 1}(y^2+x^2) \leq y^2+x^2$$

$|\operatorname{sen} t| \leq |t| \quad \forall t$

$\frac{1}{3}y^2 \geq 0$, con lo cual $x^2 \leq x^2 + \frac{1}{3}y^2$ entonces vale la acotación hecha

Como $\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq |g(x,y)| \leq \underbrace{x^2+y^2}_{\downarrow (x,y)\to(0,0) \atop 0}$

por sandwich vale que $|g(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

con lo cual $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$

Habiendo hecho esta observación sobre g podemos asegurar que f es continua en $\mathbb{R}^2$ si y solo si $a=2$, puesto que:

En puntos $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = g(x,y) + 2$ es continua por compos., resta y división (con denominador no nulo) de funciones continuas.

En $(x,y) = (0,0)$:

$f(0,0) = a$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) + 2 = 2$ $\quad g(x,y) \to 0$

y se verifica que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ si y solo si $\boxed{a=2}$ (solo para ese valor de "a" la f resulta continua en el origen).

Para estudiar la diferenciabilidad de f ya suponemos que $a=2$ (de lo contrario f no será continua y, por lo tanto, tampoco diferenciable)

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) + 2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

NOTA

Como f es diferenciable en los puntos $(x,y)\neq(0,0)$ por ser composición, resta y división (con denominador no nulo) de funciones diferenciables, tenemos que estudiar con cuidado solo la diferenciabilidad de f en el origen. Para eso tenemos que calcular $f_x(0,0)$; $f_y(0,0)$ y analizar si vale cero (o no) el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f_x(0,0)\,x-f_y(0,0)\,y-\underbrace{f(0,0)}_{=2}}{\|(x,y)\|} \overset{?}{=} 0$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0-\operatorname{sen}h^4}{h^2}+\cancel{2}-\cancel{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}-\frac{\operatorname{sen}(h^4)}{h^3}\cdot\frac{h}{h}=\lim_{h\to0}-\underbrace{\frac{\operatorname{sen}h^4}{h^4}}_{\to1}\cdot\underbrace{h}_{\to0}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0+2-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

Analicemos el límite:

$$L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-0\cdot x-0\cdot y-2}{\|(x,y)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)+\cancel{2}-\cancel{2}}{\|(x,y)\|}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^2y^2-\operatorname{sen}x^4}{x^2+1/3\,y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2-\operatorname{sen}(x^4)}{(x^2+\frac{1}{3}y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Probando por curvas vemos que $L=0$ (con lo cual f sería diferenciable en $(0,0)$ y, por tanto, sería diferenciable en $\mathbb{R}^2$). Probémoslo:

$$0 \leq \left| \frac{x^2y^2 - \operatorname{sen}(x^4)}{(x^2+\frac{1}{3}y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x^2y^2 - \operatorname{sen} x^4|}{(x^2+\frac{1}{3}y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\text{Desigualdad Triangular}}{\leq}$$

$$\leq \frac{x^2y^2 + \operatorname{sen} x^4}{(x^2+\frac{1}{3}y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \underset{|\operatorname{sen} t| \leq |t|}{\leq} \frac{x^2y^2 + x^4}{(x^2+\frac{1}{3}y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \overbrace{\frac{x^2}{x^2+\frac{1}{3}y^2}}^{\leq 1} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{x^2 \leq x^2+\frac{1}{3}y^2}{\leq} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Por Sandwich vale que $\frac{x^2y^2 - \operatorname{sen} x^4}{(x^2+\frac{1}{3}y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Luego: f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ si y solo si $a=2$

Ej 4 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y su plano tangente en el punto del gráfico $(1,2,f(1,2))$ es:

$z = x + 2y - 1$; lo reescribimos para que tenga "la pinta": $z = f_x(1,2)\,(x-1) + f_y(1,2)\,(y-2) + f(1,2)$

$$z = (x - 1 + 1) + 2(y - 2 + 2) - 1$$

$$z = (x-1) + 1 + 2(y-2) + 2.2 - 1$$

$$z = (x-1) + 2(y-2) + 4$$

Con lo cual: $\begin{cases} f_x(1,2) = 1 \\ f_y(1,2) = 2 \\ f(1,2) = 4 \end{cases}$

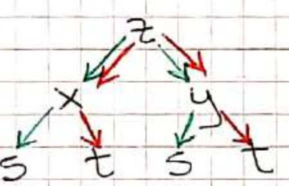
Nos definen $F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ con $x = 3s + t^2$; $y = 2s^2 + 2t$. Nos piden el plano tangente al gráfico de F en el punto $P = (0,1,F(0,1))$ (el cual existe pues F es diferenciable por ser compos. de funciones diferenciables).

Dicho plano es:

$$z = F_s(0,1)\, s + F_t(0,1)(t-1) + F(0,1)$$

Para poder calcular las derivadas parciales de F vamos a tener que usar Regla de la Cadena pues F es una función compuesta. Hagamos un "esquema ayuda memoria": $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$(s,t) \longrightarrow (x,y) \longrightarrow z = F(s,t) = f(x(s,t); y(s,t))$$



Para derivar F respecto a s tenemos que "sumar" todos los "caminos" que llevan desde la variable original s hasta la variable final z (pasando por las variables intermedias x, y) ... siguiendo los caminos verdes:

$$F_s(0,1) = f_x(x(0,1);(y(0,1)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(0,1) + f_y(x(0,1);y(0,1)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(0,1)$$

$$F_s(0,1) = f_x(1,2) \cdot 3 + f_y(1,2) \cdot 4.s\Big|_{(0,1)}$$

$$F_s(0,1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 3 \qquad \boxed{F_s(0,1) = 3}$$

Para derivar F respecto a t seguimos los caminos rojos:

$$F_t(0,1) = f_x(x(0,1);y(0,1)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(0,1) + f_y(x(0,1),y(0,1)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(0,1)$$

$$F_t(0,1) = f_x(1,2) \cdot 2t\Big|_{(0,1)} + f_y(1,2) \cdot 2$$

$$F_t(0,1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 6 \qquad \boxed{F_t(0,1) = 6}$$

Por otro lado. $F(0,1) = f(x(0,1), y(0,1)) = f(1,2) = 4$

Con lo cual el plano buscado es:

$$\boxed{z = 3s + 6(t-1) + 4}$$

NOTA