Análisis I - Matemática I - Análisis Matemático I - Análisis II (C)

Segundo Cuatrimestre 2018 - Primer Parcial (Diferido) - 09/10/2018 .

---

1. Sea la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \frac{2n}{n+2}$ y sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

   Calcular, si existen, el supremo y el ínfimo del conjunto A y determinar si son máximo o mínimo, donde
$$A = \{f(a_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^y \sin(x)|y|^{3/2}}{x^2 + |x-2|y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$.

3. Dada la función:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2x^2y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable cuya derivada direccional en el punto $(2,-1)$, en la dirección $v = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ resulta $\frac{\partial f}{\partial v}(2,-1) = \sqrt{5}$, y en la dirección $w = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ vale $\frac{\partial f}{\partial w}(2,-1) = 3\sqrt{2}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(2,-1) = 0$
$$g(x,y) = f(e^{xy} - 2x + y^2, -sen(xy) + 2x - y).$$

   Hallar la ecuación del plano tangente a g en $(0,1,g(0,1))$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Busco el máximo o mínimo

$f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow 0 = 2x - 3 \iff \boxed{\frac{3}{2} = x}$

$f''(x) = 2x > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}$ es un mínimo

Como la función es cuadrática, desde $(-\infty; \frac{3}{2})$ es decreciente

y $(\frac{3}{2}; +\infty)$ es creciente. (I)

Ahora analizo $\frac{2n}{n+2}$.

me fijo los primeros términos

$\left\{ \frac{2}{3}, 1, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}; \frac{10}{7}; \frac{3}{2} \right\}$ QVQ que la sucesión es creciente

Entonces si

$a_n < a_{n+1} \Rightarrow$ sucesión es creciente

$\frac{2n}{n+2} < \frac{2(n+1)}{n+3} \iff 2n(n+3) < (2n+2)(n+2)$

$\iff 2n^2 + 6n < 2n^2 + 4n + 2n + 4$

$\iff \cancel{2n^2} + \cancel{6n} < \cancel{2n^2} + \cancel{6n} + 4$

$0 < 4 \Rightarrow$ esto es verdadero

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n es estrictamente creciente.

Si a_n es creciente y acotada, entonces $\exists \lim_n a_n = \sup$

~~a_n está acotado para~~

veo si a_n está acotado por 2

$$\frac{2n}{n+2} < 2 \iff \cancel{2n} < \cancel{2n}+4 \quad \overset{0<4}{\text{verdadero.}}$$

Entonces

$$\lim_n \frac{2n}{n+2} = \lim_n \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})} = \lim_n \frac{2}{1+\frac{2}{n}} = 2$$

Como la sucesión es creciente, el primer elemento es el ínfimo y como pertenece a la sucesión, también es el mínimo. El sup es 2 por el teorema antes dicho. Supongo que 2 pertenece a la sucesión

$$\frac{2n}{n+2} = 2 \iff 2n = 2n+4$$ absurdo. Proviene del

suponer que $2 \in a_n$.

$\sup = \{2\}$ $\quad \inf = \{\frac{2}{3}\}$

$\max = \{\cancel{2}\}\ \emptyset$ $\quad \min = \{\frac{2}{3}\}$

Ahora, todos los elementos de a_n pertenecen al intervalo $[\frac{2}{3} ; 2)$, pero como $f(x)$ es decreciente hasta $x = \frac{3}{2}$, los primeros 6 elementos de la sucesión son decrecientes.

~~Es decir, que si agarro un nuevo conjunto con los primeros 6 elementos, su máximo y supremo sería~~ $\cancel{\frac{2}{3}}$

Es decir que $f(a_1)$ es el máximo y supremo y $f(a_6)$ es el mínimo e ínfimo si considero el conjunto

$A_1 = \{ f(a_n) : n \in \mathbb{N}, n \leq 6 \}$

¿quiénes son?

$f(a_1) = f(1) = 0$

$f(a_6) = f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$

Ahora me fijo en el siguiente conjunto

$A_2 = \{ f(a_n) : n \in \mathbb{N}, n > 6 \}$

Pero como el supremo de a_n es 2, $f(2) \overset{=0}{}$ será también el supremo y $f(a_7)$ el ínfimo, ya que esta sucesión es creciente por (I)

Entonces, sup $A_2 = \{0\}$ $\neq 0$!!

e inf $A_2 = \{ \frac{14}{9} \}$ mín $A_2 = \{ \frac{14}{9} \}$

$f(a_7) = f(\frac{14}{9}) < 0$

4) **Datos**

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial v}(2,-1)=\sqrt{5} \qquad v=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial w}(2,-1)=3\sqrt{2} \qquad w=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x,y)=f\left(e^{xy}-2x+y^2,\ -\ln(xy)+2x-y\right)$

Como f es diferenciable

Renombramos las derivadas parciales

$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot v=\sqrt{5}$ Esto es $\frac{\partial f}{\partial v}(2,-1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)=f_y$

$(f_x,f_y)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$

$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)f_x+\frac{1}{\sqrt{5}}f_y=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(-2f_x+f_y)=\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{-2f_x+f_y=}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}f_x+\frac{1}{\sqrt{2}}f_y=3\sqrt{2} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\boxed{(f_x+f_y)=6}$

$\to f_x=6-f_y \qquad -2(6-f_y)+f_y=5 \iff -12+2f_y+f_y=5$

$-12 + 3f_y = 5 \iff \boxed{f_y = \frac{17}{3}}$

Reemplazo

$-2f_x + \frac{17}{3} = 5 \iff -2f_x = -\frac{2}{3} \iff \boxed{f_x = \frac{1}{3}}$ ✓

La ecuación del plano tangente es

$$f(\overset{x_0\, y_0}{x, y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overset{(x_0, y_0)}{x, y})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}^{(x_0, y_0)}(y - y_0) = z$$

Busco $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

Sea $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Llamo $h(x,y) = (e^{xy} - 2x + y^2, -\operatorname{sen}(xy) + 2x - y)$ ✓

Regla de la cadena ¿por qué podés usar regla de la cadena?

$\cancel{\partial f}$

$D g(x,y) = D(f \circ h)(x,y)$

$D f(x,y) = D f(h(x,y)) \cdot D h(x,y)$ ✓

Busco $D h(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} - 2 & xe^{xy} + 2y \\ -y\cos(xy) + 2 & -x\cos(xy) - 1 \end{pmatrix}$

??

$D f(0,1) = D f(2,-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ No ¿quién es esta matriz?

¿por qué?

$D f(0,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{17}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$D f(0,1) = \left(-\frac{1}{3} + 17 \quad \frac{2}{3} - \frac{17}{3}\right)$

$D f(0,1) = \left(\frac{50}{3}, -5\right)$ arrastran error.

π: ~~$f(0,1) + \frac{50}{3}(x \ldots) +$~~ no es la ec de un plano!!

$\pi: f(0,1) + \frac{50}{3}x - 5(y-1) = z$

$\pi: f(0,1) + \frac{50}{3}x - 5y + 5$

~~$f(0,1)$ no se puede calcular~~

$f(0,1) = f(2,-1)$ ✓ (no se puede saber su valor con los datos).

$\pi: \cancel{f(0,1)}^{\,1} + \frac{50}{3}x - 5y + 5$

$$\boxed{\pi: \frac{50}{3}x - 5y + 6}$$

B=

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^2 x^2 y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Analizo si existen las derivadas parciales de $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda(1,0) + (0,0)) - f(0,0)}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\dfrac{(\lambda+3)^2 \lambda^2 0}{\lambda^2 + 0}}{\lambda} = 0 . \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda(0,1) + (0,0)) - f(0,0)}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\dfrac{(0+3)^2 0^2 \lambda}{0^2+\lambda^4}}{\lambda} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

~~Así~~ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Pero que la función sea diferenciable en el origen, tiene que cumplir con el verifichiamo limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{(x+3)^2 x^2 y}{x^2+y^4} - 0 - 0 - 0}{\|(x,y)\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+3)^2 x^2 y}{(x^2+y^4)\|(x,y)\|} = 0$$

nel fare avvicinamento per curve, proveremo il limite esiste.

Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ Poniamo $\frac{(x+3)^2 x^2 y}{(x^2+y^4)\|(x,y)\|} = h(x,y)$

$\varphi(t) = (t,t)$

$$h \circ \varphi(t) = \frac{(t+3)^2 t^2 t}{(t^2+t^4)\sqrt{t^2+t^2}}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t+3)^2 \cancel{t^2} t}{\cancel{t^2}(1+t^2)\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{(t+3)^2 t}{(1+t^2)|t|\sqrt{2}}$$

me fijo el límite por izquierda y por derecha

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{(t+3)^2\, t}{(1+t^2)(-t)\sqrt{2}} = -\frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t+3)^2\, t}{(1+t^2)\, t\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

son distintos, entonces $\nexists \lim_{(x,y)\to 0} h\circ g(t)$

~~Debido al teorema que dice que la composición de funciones continuas diferenciables es continua diferenciable, puedo decir por el contrarrecíproco que, como $h\circ g(t)$ no es continua en el origen, $h(x,$~~

Debido al teorema que dice que la composición de funciones ~~continuas~~ diferenciables es ~~continua~~ diferenciable, puedo afirmar ~~que~~ por el contrarrecíproco que como $h\circ g(t)$ no es ~~continua~~ diferenciable en el origen, $h(x,y)$ tampoco lo es ($g(t)$ sí lo es)

como encontré una curva donde el límite ni siquiera existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+3)^2 x^2 y}{(x^2+y^4)\|(x,y)\|}$ no existe. Por lo tanto, no diferenciable