FINAL DE ÁLGEBRA I
(15-11-22)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"Todo lo llenas tú, todo lo llenas."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Calcule la cantidad de relaciones de equivalecia $\Re$ de A que satisfacen

$$\{(1,1),(1,3),(3,2),(4,5),(7,6),(8,9)\} \subseteq \Re \quad y \quad (1,10) \notin \Re.$$

Resolución:

Vamos a utilizar para resolver este ejecicio la existencia de una biyección entre las relaciones de equivalencia que se pueden definir en A y las particiones que tal conjunto admite (ver la Proposición 1.2.8 del libro hecho para la materia por Teresa Krick). Teniendo en cuanta esto, si $\Re$ es una relación de equivalencia sobre A tal que, por ejemplo, $(1,3) \in \Re$, la partición correspondiente a tal relación tendrá a los elementos 1 y 3 en el mismo subconjunto (ya que a través de la biyección entre relaciones de equivalencia y particiones, las clases de equivalencia de una tal relación se corresponden con los subconjuntos de la partición correspondiente a ella). Luego, una partición de A correspondiente a una relación de equivalencia sobre A como la del enunciado, verifica que:

- 1, 2 y 3 son elementos del mismo subconjunto de la partición.
- 4 y 5 son elementos del mismo subconjunto de la partición.
- 6 y 7 son elementos del mismo subconjunto de la partición.
- 8 y 9 son elementos del mismo subconjunto de la partición.
- 1 y 10 son elementos de distintos subconjuntos de la partición.

De lo anterior se deduce que la cantidad mínima de subconjuntos para una tal partición es 2 (la única es $\{\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11\},\{10\}\}$) y la cantidad máxima es 6 (la única es $\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\},\{8,9\},\{10\},\{11\}\}$). Contemos las restantes particiones, es decir, aquellas que tienen 3, 4 o 5 subconjuntos (notar antes de empezar que 1 y 10 están desde el inicio en subconjuntos distintos, que 2 y 3 están en el subconjunto que contiene a 1, y que basta incluir a 4, 6 u 8 en determinado subconjunto para incluir a la vez a 5, 7 o 9 respectivamente):

- 3 subconjuntos: la cantidad de formas de incluir en el subconjunto inicialmente vacío un elemento entre 4, 6, 8 y 11 es $\binom{4}{1}$, y por cada una de ellas, cada uno de los tres elementos restantes puede ser incluido en cualquiera de los 3 subconjuntos. Luego, $\binom{4}{1} \cdot 3^3$ es la cantidad de particiones con 3 subconjuntos.

- 4 subconjuntos: la cantidad de formas de incluir en uno de los subconjuntos inicialmente vacíos un elemento entre 4, 6, 8 y 11 es $\binom{4}{1}$; por cada una de ellas, la cantidad de formas de incluir a uno de los tres elementos restantes en el otro subconjunto vacío es $\binom{3}{1}$, y por cada una de ellas cada uno de los dos elementos restantes puede ser incluido en cualquiera de los 4 subconjuntos. Luego, $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 4^2$ es la cantidad de particiones con 4 subconjuntos.

- 5 subconjuntos: la cantidad de formas de incluir en uno de los subconjuntos inicialmente vacíos un elemento entre 4, 6, 8 y 11 es $\binom{4}{1}$; por cada una de ellas, la cantidad de formas de incluir a uno de los tres elementos restantes en otro de los subconjuntos inicialmente vacíos es $\binom{3}{1}$; por cada una de ellas, la cantidad de formas de incluir a uno de los dos elementos restantes en el último subconjunto vacío es $\binom{2}{1}$, y por cada una de ellas el elemento restante puede ser incluido en cualquiera de los 5 subconjuntos. Luego, $\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot 5$ es la cantidad de particiones con 5 subconjuntos.

Finalmente, sumando todo, tenemos que la cantidad de particiones (y por lo tanto de relaciones de equivalencia) en A cumpliendo lo pedido es

$$1+\binom{4}{1}\cdot 3^3+\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot 4^2+\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot 5+1.$$

■

Ejercicio 2

Pruebe que $d := (7^{n-1}+5^{n+2} : 5\cdot 7^n - 5^{n+1})$ divide a 176 para todo $n\in\mathbb{N}$. Pruebe además que si n es par entonces $d\in\{8,16,88,176\}$ y que si n es impar entonces $d\in\{2,22\}$.

Resolución:

Veamos que $d \mid 176$ para todo $n\in\mathbb{N}$.
En primer lugar tenemos que

$$d \mid 7^{n-1}+5^{n+2} \Rightarrow d \mid 35\cdot 7^{n-1}+35\cdot 5^{n+2} \Rightarrow d \mid 35\cdot 7^{n-1}+175\cdot 5^{n+1}, \qquad (i)$$

$$d \mid 5\cdot 7^n-5^{n+1} \Rightarrow d \mid 35\cdot 7^{n-1}-5^{n+1}. \qquad (ii)$$

Luego, por (i) y (ii) resulta que $d \mid 176\cdot 5^{n+1}$ (iii).
En segundo lugar tenemos que

$$d \mid 5\cdot 7^n-5^{n+1} \Rightarrow d \mid 176\cdot 5\cdot 7^n-176\cdot 5^{n+1}. \qquad (iv)$$

De (iii) y (iv) resulta que $d \mid 176\cdot 5\cdot 7^n$.
Entonces,

$$d \mid (176{\cdot}5^{n+1} : 176{\cdot}5{\cdot}7^n) = 176{\cdot}5{\cdot}(5^n : 7^n) = 176{\cdot}5{\cdot}(5:7)^n = 176{\cdot}5{\cdot}1^n = 176{\cdot}5$$

, que implica que $d \mid 176$ pues $(d:5)=1$ (ya que $5 \mid d \;\Rightarrow\; 5 \mid 7^{n-1}+5^{n+2} \;\Rightarrow\; 5 \mid 7^{n-1}$, lo que es absurdo). Probamos así que $d \mid 176$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Veamos ahora que si n es par entonces $d \in \{8, 16, 88, 176\}$. Como $176 = 2^4 \cdot 11$ se tiene que $Div_+(176) = \{1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 44, 88, 176\}$, y por lo tanto $d \in \{8, 16, 88, 176\}$ si y sólo si $8 \mid d$. Sea $n \in \mathbb{N}$ par. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Entonces,

$$d := (7^{n-1} + 5^{n+2} : 5 \cdot 7^n - 5^{n+1}) = (7^{2k-1} + 5^{2k+2} : 5 \cdot 7^{2k} - 5^{2k+1}).$$

Luego,

$$7^{2k-1} + 5^{2k+2} \equiv (-1)^{2k-1} + 25^{k+1} \equiv -1 + 1^{k+1} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \ (mod\ 8),$$

$$5 \cdot 7^{2k} - 5^{2k+1} \equiv 5 \cdot 49^k - 5 \cdot 25^k \equiv 5 \cdot 1^k - 5 \cdot 1^k \equiv 5 - 5 \equiv 0 \ (mod\ 8),$$

y por lo tanto $8 \mid 7^{2k-1} + 5^{2k+2}$ y $8 \mid 5 \cdot 7^{2k} - 5^{2k+1}$, de lo cual resulta que $8 \mid d$.

Veamos para terminar que si n es impar entonces $d \in \{2, 22\}$. Esto último sucede si y sólo si $2 \mid d$ y $4 \nmid d$. Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Luego, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Entonces,

$$d := (7^{n-1} + 5^{n+2} : 5 \cdot 7^n - 5^{n+1}) = (7^{2k} + 5^{2k+3} : 5 \cdot 7^{2k+1} - 5^{2k+2}).$$

Luego,

$$7^{2k} + 5^{2k+3} \equiv 1^{2k} + 1^{2k+3} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \equiv 0 \ (mod\ 2),$$
$$5 \cdot 7^{2k+1} - 5^{2k+2} \equiv 1 \cdot 1^{2k+1} - 1^{2k+2} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \ (mod\ 2),$$
$$7^{2k} + 5^{2k+3} \equiv 49^k + 1^{2k+3} \equiv 1^k + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \ (mod\ 4),$$

y por lo tanto $2 \mid 7^{2k} + 5^{2k+3}$, $2 \mid 5 \cdot 7^{2k+1} - 5^{2k+2}$ y $4 \nmid 7^{2k} + 5^{2k+3}$, de lo cual resulta que $2 \mid d$ y $4 \nmid d$.

$\blacksquare$

Ejercicio 3

Pruebe que si $w \in \mathbb{C}$ satisface $w^{13} = 1$, entonces $(w^{39} + w^{20})(w^{32} - 1)$ es imaginario puro.

Resolución:

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(w^{39}+w^{20})(w^{32}-1) &= (w^{r_{13}(39)}+w^{r_{13}(20)})(w^{r_{13}(32)}-1)\\
&= (w^{0}+w^{7})(w^{6}-1)\\
&= (1+w^{7})(w^{6}-1)\\
&= w^{6}-1+w^{13}-w^{7}\\
&= w^{6}-1+1-w^{7}\\
&= w^{6}-w^{7}\\
&= w^{6}-((w^{7})^{-1})^{-1}\\
&= w^{6}-(w^{-7})^{-1}\\
&= w^{6}-(w^{r_{13}(-7)})^{-1}\\
&= w^{6}-(w^{6})^{-1}\\
&= w^{6}-\overline{w^{6}}\\
&= 2Im(w^{6})i,
\end{aligned}$$

pues $(a+bi)-(a-bi)=2bi$, lo que prueba que $(w^{39}+w^{20})(w^{32}-1)$ es imaginario puro.

$\blacksquare$

Ejercicio 4

Encuentre todos los valores de a para los cuales el polinomio

$$X^3-2aX^2-a^2X+2a\in\mathbb{C}[X]$$

tiene dos raíces cuya suma es 3 y cuyo producto es 2.

Resolución:

Sean $f:=X^3-2aX^2-a^2X+2a$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tales que $f(\alpha)=f(\beta)=0$, $\alpha+\beta=3$ y $\alpha\cdot\beta=2$. Luego,

$$\alpha\cdot\beta=2\Rightarrow\beta=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow\alpha+\frac{2}{\alpha}=3\Rightarrow\alpha^2-3\alpha+2=0\Rightarrow(\alpha-1)(\alpha-2)=0,$$

lo que implica que $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, o $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

Ahora utilizamos que $f(1) = f(2) = 0$ para encontrar el o los valores de a. Resulta

$$f(1) = 1^3 - 2a1^2 - a^2 1 + 2a \Rightarrow 0 = 1 - 2a - a^2 + 2a \Rightarrow 0 = -a^2 + 1 \qquad (i)$$

$$f(2) = 2^3 - 2a2^2 - a^2 2 + 2a \Rightarrow 0 = 8 - 8a - 2a^2 + 2a \Rightarrow 0 = -2a^2 - 6a + 8 \qquad (ii)$$

De (i) se obtiene $a = 1$ o $a = -1$. Reemplazando en (ii),

$$0 = -2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = -2 - 6 + 8$$

que vale, y

$$0 = -2(-1)^2 - 6(-1) + 8 = -2 + 6 + 8 = 12,$$

lo que es absurdo.

Se concluye así que $a = 1$.

$\blacksquare$