[redacted]

1) Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que vale la desigualdad

$$7^n + 8^n \leq 2^n + 10^n$$

<u>$n=1$</u> $7+8 \leq 2+10$

$15 \leq 12$ No vale

<u>$n=2$</u> $7^2+8^2 \leq 2^2+10^2$

$49+64 \leq 4+100$

$113 \leq 104$ No vale

<u>$n=3$</u> $7^3+8^3 \leq 2^3+10^3$

$343+512 \leq 8+1000$

$855 \leq 1008$ Vale

Veamos que $7^n+8^n \leq 2^n+10^n \quad \forall n \geq 3$ por inducción

Caso Base <u>$n=3$</u> Probado anteriormente

Nuestra H.I es que $7^n+8^n \leq 2^n+10^n$ y q.v.q

$$7^{n+1}+8^{n+1} \leq 2^{n+1}+10^{n+1}$$

$$7 \cdot 7^n + 8 \cdot 8^n \leq 2 \cdot 2^n + 10 \cdot 10^n$$

$$7 \cdot 7^n + 8 \cdot 8^n - 8^n + 8^n = 7 \cdot 7^n + 7 \cdot 8^n + 8^n = 7(7^n+8^n)+8^n$$

$$7(7^n+8^n)+8^n \underset{\text{por H.I}}{\leq} 7(2^n+10^n)+8^n = 7 \cdot 2^n + 7 \cdot 10^n + 8^n$$

Luego alcanza con ver que $7 \cdot 2^n + 7 \cdot 10^n + 8^n \leq 2 \cdot 2^n + 10 \cdot 10^n$

$$8^n \leq -5 \cdot 2^n + 3 \cdot 10^n$$

Probemos que $8^n \leq -5 \cdot 2^n + 3 \cdot 10^n$ usando inducción

$\forall n \geq 3$

Caso Base

$\underline{n=3}$: $8^3 \leq -5\cdot 2^3 + 3\cdot 10^3$

$512 \leq -40+3000$ ✓ Vale el caso Base

Nuestra H.I es que $8^n \leq -5\cdot 2^n + 3\cdot 10^n$ y queremos ver que

$8^{n+1} \leq -5\cdot 2^{n+1} + 3\cdot 10^{n+1}$

$8\cdot 8^n \leq -10\cdot 2^n + 30\cdot 10^n$

$8\cdot 8^n \underset{\text{por H.I}}{\leq} 8\cdot(-5\cdot 2^n + 3\cdot 10^n) = -40\cdot 2^n + 24\cdot 10^n$

Luego alcanza con ver que $-40\cdot 2^n + 24\cdot 10^n \leq -10\cdot 2^n + 30\cdot 10^n$

$-40\cdot 2^n + 24\cdot 10^n \leq -10\cdot 2^n + 30\cdot 10^n$

$0 \leq 30\cdot 2^n + 6\cdot 10^n$ Vale $\forall n \in \mathbb{N}$ ✓

Luego queda probado que la desigualdad vale $\forall n \in \mathbb{N} \geq 3$

2) ¿Cuántos anagramas de la palabra ELECTROCARDIOGRAMA pueden formarse con la condición de que las letras A no estén todas juntas?

La palabra ELECTROCARDIOGRAMA tiene 18 letras y 3 A.

Además tenemos letras repetidas: E:2, C:2, O:2, R:3

La cantidad de anagramas sin ninguna restricción sería

$$\underbrace{\binom{18}{2}}_{\text{Lugares para la E}}\underbrace{\binom{16}{2}}_{\text{Lugares para la C}}\underbrace{\binom{14}{2}}_{\text{Lugares para la O}}\underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{Lugares para la R}}\underbrace{\binom{9}{3}}_{\text{Lugares para la A}}\cdot \underbrace{6!}_{\text{Letras restantes}} = \frac{18!}{2!\,2!\,2!\,3!\,3!}$$

Si tomamos a las 3A y las juntamos y la tomamos como una nueva letra X, tendríamos

$$\underbrace{\binom{16}{2}}_{E}\underbrace{\binom{14}{2}}_{C}\underbrace{\binom{12}{2}}_{O}\underbrace{\binom{11}{3}}_{R}\cdot 8! = \frac{16!}{2!\,2!\,2!\,3!}$$

Entonces la cantidad de anagramas tal que todas las A no estén juntas sería:

$$\binom{18}{2}\binom{16}{2}\binom{14}{2}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\cdot 6! - \binom{16}{2}\binom{14}{2}\binom{12}{2}\binom{11}{3}\cdot 8!$$

Y no tengo que tomar las permutaciones de las A ya que son el mismo anagrama.

3) Hallar todos los $a, b \in \mathbb{N}$ que verifican simultáneamente

• $12a - 7b = 5$ • $2^b \equiv a\ (13)$

$12a - 7b = 5$

$12a = 5 + 7b$

$a = \dfrac{5+7b}{12} \in \mathbb{Z} \iff 5 + 7b \equiv 0\ (12)$

$7b \equiv 7\ (12)$

$(5:12) = 1$

$5 \cdot 7b \equiv 5 \cdot 7\ (12)$

$35b \equiv 35\ (12)$

$-b \equiv -1\ (12)$

$\boxed{b \equiv 1\ (12)}$

Por lo tanto $a = \dfrac{5 + 7(12k+1)}{12} = \dfrac{12 + 7 \cdot 12k}{12} = 1 + 7k$

$\boxed{a \equiv 1\ (7)}$

Además $2^b \equiv a\ (13)$, como 13 es primo y $13 \nmid 2$ $2^{12} \equiv 1\ (13)$

$2^b \equiv (2^{12})^q \cdot 2^{r_{12}(b)} \equiv 2^{r_{12}(b)} \equiv 2^1 \equiv 2\ (13)$

Entonces para que se cumpla lo pedido $\boxed{a \equiv 2\ (13)}$

Luego nos queda la siguiente ecuación de congruencia:

$\begin{cases} a \equiv 1\ (7) \\ a \equiv 2\ (13) \end{cases}$ que por T.C.R tiene solución única mod$(7 \cdot 13)$

• $a = 7k + 1 \Rightarrow 7k + 1 \equiv 2\ (13)$

$7k \equiv 1\ (13)$

$\boxed{k \equiv 2\ (13)} \rightarrow k = 13l + 2 \Rightarrow a = 7(13l + 2) + 1$

$a = 7 \cdot 13 l + 15$

$a \equiv 15(91)$

Luego los a, b que cumplen lo pedido son

$b \equiv 1(12)$ y $a \equiv 15(91)$