Nombre:.....................................LU:.............Email:..........................

Final de Probabilidades y Estadística (Computación).
26 de julio, 2016

Resuelva solamente 6 ejercicios, 3 de cada parte. Se aprueba con 4 ejercicios bien hechos, 2 de los cuales deben ser de cada parte. Indique cuáles eligió. Justifique todas sus respuestas.

Primera parte

1. *a*) Enunciar y demostrar la Fórmula de Bayes.

   b) Una enfermedad afecta al 2 % de la población. Una empresa farmacéutica publicita un nuevo test para detectar la enfermedad, con una tasa de falsos negativos del 3 % y una tasa de falsos positivos del 1 %. Calcular la probabilidad de realmente estar enfermo, cuando el test dio positivo.

2. *a*) Sean X e Y variables aleatorias continuas e independientes, con densidades f_X y f_Y, respectivamente. Hallar la densidad de $X + Y$.

   b) Identificar la distribución de $X + Y$, si X e Y son variables exponenciales independientes de igual parámetro λ.

3. *a*) Definir independencia para una familia $(A_i, i \in I)$, donde A_i son eventos e I es un conjunto cualquiera.

   b) Dar un ejemplo de tres eventos independientes dos a dos pero no independientes.

4. Sean X e Y i.i.d. continuas con distribución común F y densidad f.

   a) Probar que $V = \max\{X, Y\}$ tiene distribución $\mathbb{P}(V \leq x) = F(x)^2$, y densidad $f_V(x) = 2f(x)F(x)$.

   b) Hallar la densidad de $U = \min\{X, Y\}$.

5. El contenido de cada botella de una bebida sigue una distribución $N(600, 400)$, medido en ml. Los contenidos de distintas botellas son variables independientes. Estimar $P(|\bar{X} - 600| > 10)$, donde $\bar{X}$ es el contenido promedio de 5000 botellas. Justificar.

Segunda parte

1. *a*) Construir un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, para la media de la normal con varianza σ^2 conocida.

   b) A partir del intervalo hallado, construir un test de hipótesis de nivel α para $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$, indicando el estadístico usado y la región de rechazo.

2. Sean $\{X_i\}_{i \geq 1}$ variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli(p).

   a) ¿Qué distribución tiene $\sum_{i=1}^{n} X_i$?

   b) Hallar los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud de p.

   c) Decidir si los estimadores hallados en *b*) son insesgados, o calcular su sesgo. Decidir si son consistentes. Justificar.

Continúa al reverso.

3. *a*) Definir la función generadora de momentos $M_t(X)$ de una variable aleatoria X.

   b) Calcular $M_t(X)$ si $X \sim exp(\lambda)$.

   c) Enunciar y probar el Teorema Central del Límite. En caso de utilizar propiedades de la función generadora de momentos, enunciarlas.

4. Supongamos que el número de goles que marca un equipo de fútbol está dado por un proceso de Poisson de tasa λ, con el tiempo medido en minutos. En una cierta fecha se enfrentan Independiente y Rácing. Sean λ_I y λ_R las respectivas tasas de los procesos de Poisson, que suponemos independientes.

   a) Calcular la probabilidad de que gane Independiente 2 a 1.

   b) Ya ha terminado el primer tiempo. Si se sabe que Rácing va ganando 2 a 0, cuál es la probabilidad de que el primer gol haya ocurrido durante los primeros 15 minutos, y el segundo antes de los primeros 30 minutos?

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con media $E(X_i) = 0$ y varianza $V(X_i) = 1 - \dfrac{1}{3^i}$.

   a) Sea $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Calcular $E(\bar{X}_n)$ y $V(\bar{X}_n)$.

   b) Hallar el límite en probabilidad de $\bar{X}_n$ cuando $n \to \infty$.