PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA I

TEMA 2

18 de Mayo de 2013

LU N°	Apellido y Nombre
480/13	MartinDatticades, Matías Facundo

Turno Noche.

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota
–	R	R+	–	I

1. Se define la siguiente relación entre subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$A\mathcal{R}B \text{ si y solo si } A\triangle B \text{ no contiene ningún múltiplo de 5.}$$

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
   b) ¿Cuántos conjuntos $A \subseteq \{1,2,3,\dots,89\}$ de 3 elementos cumplen que $A\mathcal{R}\{25,26\}$?

2. Dada la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ y $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n - 4n + 4$, conjeturar una fórmula para el término general a_n y demostrarla.

3. Se distribuyen al azar 11 monedas de un peso y 4 monedas de dos pesos entre cinco personas entre las que se encuentra Melisa. Calcular la probabilidad de que Melisa reciba al menos 2 pesos.

4. Probar que si $(a:b) = 3$, entonces $(a^2 + 2b^2 + 15 : 45) = 3$.

Justifique todas las respuestas.

Martin Darricades

1	2	3	4	5
R	B	M	X	B

Corregir 1 sola vez

CALIF. A^c

condicional

APELLIDO Y NOMBRE: Martin Darricades, Matias Facundo
LIBRETA: 480/13 TURNO: 9 a 12 15 a 18 17 a 20 TEMA 1

Preguntar que significa

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2013
Recuperatorio del 1er Parcial (7/12/2013)

---

1. Sea $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$:

$$A \mathcal{R} B \iff A - B = \emptyset$$

   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

   (b) ¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#B = 10$ y $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mathcal{R} B$?

---

2. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Conjeturar una fórmula general para a_n y probar que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

3. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale la desigualdad siguiente:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 . i! \leq n(n+1)!$$

---

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 5$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $(a^{n-1}b : a^n + b^n)$.

---

5. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $3 \mid a$, $(a : b) = 20$ y $[a : b] = 9000$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6

Calif.

Apellido y Nombre:

Libreta: Turno: 11 a 14 14 a 17 20 a 22 TEMA 1

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012

1er Parcial (13/10/2012)

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$. Definimos en $\mathcal{P}(X)$ la relación $\mathfrak{R}$ de la siguiente forma:

$$A \,\mathfrak{R}\, B \iff \text{el conjunto } A \triangle B \text{ tiene a lo sumo 2 elementos.}$$

   (a) Determinar si $\mathfrak{R}$ es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

   (b) Si $A = \{1, 2\}$, calcular la cantidad de conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$tales que $A \,\mathfrak{R}\, B$.

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (3i+1)2^{i-1} > n^3.$$

3. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 83 bolitas iguales en 5 casilleros numerados del 1 al 5 si en los casilleros pares debe haber una cantidad par de bolitas y en los impares una cantidad impar de bolitas?

4. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $(3 : n) = 1$, $(5n + 3^{n+1} : 4n - 3^n) = 1$ o 17.

5. Definimos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como: $a_1 = 14$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ para todo $n \geq 1$. Probar que la sucesión

$$b_n := \sqrt{3(a_n^2 - 4)},$$

   satisface que b_n es entero y además divisible por 4 para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Se extraen dos números a y b; el número a se extrae del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y el número b del conjunto $\{1, \ldots, 15\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación de congruencia

$$ax \equiv b \pmod{15}$$

   tenga al menos una solución? ¿Y de que tenga exactamente una solución módulo 15?

Justificar todas las respuestas

1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre:

Libreta: Turno: 11 a 14 14 a 17 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012

Recuperatorio Primer Parcial (17/12/2012)

---

1. Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z}$ definida por:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + kb^2 \equiv 0(2).$$

   (a) Hallar todos los $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   (b) Para los valores de k que cumplen el ítem anterior, hallar todas las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$.

---

2. Cuatro grupos de personas, $G_1, \ldots . G_4$, se juntan a trabajar en una mesa redonda con 12 asientos. Los grupos G_1 y G_2 están formados por 4 personas y los gupos G_3 y G_4 están formados por 2 personas. ¿De cuantas maneras se pueden ubicar en la mesa sabiendo que los integrantes de cada grupo se sientan consecutivamente?

---

3. Probar que si $(a : b) = 1$, entonces

$$(a + b : a^2 - ab + b^2) = 1 \text{ o } 3.$$

---

4. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, el número $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ es un número entero.

---

5. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x + 9y & \text{si } x \geq y, \\ 15x - 35y & \text{si } x < y. \end{cases}$$

   (a) Decidir si f es inyectiva o no.

   (b) Calcular la imagen de f.

Justificar todas las respuestas

1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre:

Libreta: Turno: 11 a 14 14 a 17 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012

Recuperatorio Primer Parcial (17/12/2012)

1. Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z}$ definida por:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + kb^2 \equiv 0(2).$$

   (a) Hallar todos los $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   (b) Para los valores de k que cumplen el ítem anterior, hallar todas las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$.

2. Cuatro grupos de personas, $G_1, \ldots G_4$, se juntan a trabajar en una mesa redonda con 12 asientos. Los grupos G_1 y G_2 están formados por 4 personas y los gupos G_3 y G_4 están formados por 2 personas. ¿De cuantas maneras se pueden ubicar en la mesa sabiendo que los integrantes de cada grupo se sientan consecutivamente?

3. Probar que si $(a : b) = 1$, entonces

$$(a + b : a^2 - ab + b^2) = 1 \text{ o } 3.$$

4. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, el número $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ es un número entero.

5. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x + 9y & \text{si } x \geq y, \\ 15x - 35y & \text{si } x < y. \end{cases}$$

   (a) Decidir si f es inyectiva o no.

   (b) Calcular la imagen de f.

Justificar todas las respuestas