Probabilidad y Estadística (C): Primer Parcial - 1er Cuatrimestre 2012 Nº HOJAS: 4

Nombre y Apellido.. Número de libreta........................Turno.....................

Se aprueba con dos ejercicios bien. Justifique todas sus respuestas.

A

13

1. Se sabe que entre los jugadores profesionales de ping pong un 5% consume anfetaminas antes de cada partido. Durante un campeonato se les toma una muestra de orina a todos los jugadores. La muestra de cada jugador se divide en dos submuestras iguales a las que se les aplica un test clínico. Si el resultado de aplicar el test a las dos submuestras da positivo entonces el jugador es sancionado; en cualquier otro caso el jugador no es sancionado. Considere los eventos:

   $A_1 =$ el resultado de la primera submuestra da positivo $\qquad D =$ el jugador consumió anfetaminas

   $A_2 =$ el resultado de la segunda submuestra da positivo

   Se asume que los eventos A_1 y A_2 condicionados a los eventos D y a D^c son independientes, esto es: $P(A_1 \cap A_2|D) = P(A_1|D)P(A_2|D)$ y $P(A_1 \cap A_2|D^c) = P(A_1|D^c)P(A_2|D^c)$. Se sabe además que $P(A_i|D) = 0.9$ y $P(A_i|D^c) = 0.02$ para $i = 1; 2$.

   (a) Calcule la probabilidad de que un jugador haya consumido anfetaminas dado que el resultado de la primera submuestra es positivo.

   (b) Calcule la probabilidad de que un jugador sea sancionado. ¿Son A_1 y A_2 eventos independientes?

   (c) Calcule la probabilidad de que un jugador sancionado haya consumido anfetaminas.

2. El número de pasajeros que transita por la aduana del aeropuerto de Madrid es un proceso de Poisson. Se sabe que el número medio de pasajeros (en miles) por hora es 0.2.

   (a) Hallar la probabilidad de que entre las 0 y 12 horas del mediodía lleguen 4000 pasajeros.

   (b) ¿Cuántas horas deben pasar desde que comienza un determinado día para que la probabilidad de que no transite ningún pasajero por la aduana sea menor que 0.2?

   (c) La aduana cobra una tasa de \$125 por pasajero y paga 5 millones de pesos de gastos por mes. Calcule **el valor esperado de la ganancia neta mensual de la aduana.** (1 = 30 días)

3. En Alemania, en el siglo XVI, la unidad de longitud se determinaba de la siguiente manera: cierto domingo, al primer hombre que salía de la iglesia se le medía la longitud de su pie izquierdo. El resultado obtenido era considerado como el pie correcto y legal a utilizar en las operaciones comerciales. Se sabe que la longitud del pie (en mm) se distribuye según una $N(\mu, \sigma^2)$.

   la esperanza esta entre 240 y 260

   (a) Sabiendo que para el 10% de los hombres la longitud del pie izquierdo es mayor a 280 mm y para el 5% dicha longitud es menor a 240, ¿cómo se distribuye la longitud del pie legal medido en una determinada iglesia?

   (b) Calcular la probabilidad de que dos pies legales, medidos en dos iglesias diferentes a la que concurren distintos fieles, difieran entre sí mas de 5 mm.

4. En una jaula hay un ratón y dos pollitos. La probabilidad de que cada uno de los animales salga de la jaula en la próxima hora es de 0.3, independientemente de lo que hagan los demás. Esperamos una hora y observamos la jaula.

   (a) ¿Cómo se distribuye la variable aleatoria X que cuenta el número de animales que quedan en la jaula?

   (b) Si Y es el número total de patas de los animales que hay en la jaula, completar la función de probabilidad conjunta de (X, Y).

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	...	0	0	0
2	0	...	...	0
4	0	...	...	0
6	0	...	...	0
8	0	0	0	...

NO

   (c) Calcular la $cov(X, Y)$. Son X e Y independientes?

   (d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de patas no supere al doble del número de animales?

3/B/B | B | B/X | B

EJ 1)

a) CALCULAR $P(D|A_1)$

POR BAYES ... POR PROBABILIDAD TOTAL (YA QUE $D \cap D^c = \emptyset$) (Y $D \cup D^c = \Omega$)

$$P(D|A_1) = \frac{P(A_1|D)\cdot P(D)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|D)\cdot P(D)}{P(A_1|D)\cdot P(D) + P(A_1|D^c)\cdot P(D^c)}$$

$P(A_1|D)$ ES DATO $= 0{,}9$

$P(D)$ ES DATO $= 0{,}05 \Rightarrow P(D^c) = 0{,}95$

$P(A_1|D)\cdot P(D) = 0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}045$

LUEGO $P(A_1|D^c)$ ES DATO $= 0{,}02 \Rightarrow P(A_1|D^c)\cdot P(D^c) = 0{,}02 \cdot 0{,}95 = 0{,}019$

POR LO TANTO $P(A_1) = 0{,}045 + 0{,}019 = 0{,}064$

$\boxed{\text{OBS:}}$ POR SIMETRÍA $P(A_2) = P(A_1) = 0{,}064$

$$\therefore \boxed{P(D|A_1) = \frac{0{,}045}{0{,}064} = 0{,}703125}$$

b)

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2|D)\cdot P(D) + P(A_1 \cap A_2|D^c)\cdot P(D^c) = P(A_1|D)\cdot P(A_2|D)\cdot P(D) + P(A_1|D^c)\cdot P(A_2|D^c)\cdot P(D^c)$$

POR PROB. TOTAL

POR DATO, $P(A_1 \cap A_2|D) = P(A_1|D)\cdot P(A_2|D)$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}02 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}95 = 0{,}0405 + 0{,}00038 = 0{,}04088$$

AHORA, SI A_1 y A_2 SON INDEPENDIENTES $\Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2)$

$0{,}04088 \neq (0{,}064)^2 = 0{,}004096$

$\therefore$ A_1 y A_2 NO SON INDEPENDIENTES.

NOTA

c)

por datos

$$P(D \mid A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \mid D) \cdot P(D)}{P(A_1 \cap A_2)} = \frac{(0{,}9)^2 \cdot 0{,}05}{0{,}04088} = 0{,}99070\ldots$$

NOTA

B

EJ 2)

SEA X_t = CANT. DE MILES DE PASAJEROS QUE PASAN POR LA ADUANA EN t HORAS

$$X_t \sim \mathcal{P}(0,2 \cdot t)$$

a) $P(X_{12}=4) = \frac{(0,2\cdot 12)^4}{4!} \cdot e^{-0,2\cdot 12} = \frac{33,1776}{24} \cdot e^{-2,4} = 1,3824 \cdot 0,09071795\ldots$

$= 0,125408\ldots$

b) $P(X_t=0) \leq 0,2$ BUSCO t.

$\Leftrightarrow \frac{(0,2\cdot t)^0}{0!} e^{-0,2t} < 0,2$

$e^{-0,2t} < 0,2 \Leftrightarrow -0,2t < \ln(0,2)$

$-0,2t < -1,609437912$

$\boxed{t > 8,047189} = 8$ HORAS Y ALGO

c) SEA $Y = 125 \cdot 1000 \cdot X_{720} - 5000000$ OBS: 1 DÍA — 24 hs

$\uparrow$ GANANCIA NETA MENSUAL EN UN MES DE 30 DÍAS

30 DÍAS — 720 hs $\Rightarrow X_{720} \sim \mathcal{P}(0,2\cdot 720) = \mathcal{P}(144)$

$E(Y) = E(125000 \cdot X_{720} - 5000000) = 125000 \cdot E(X_{720}) - 5000000 = 125000 \cdot 144 - 5000000$

$\uparrow$ LINEALIDAD DE LA ESPERANZA

$= 13\,000\,000$

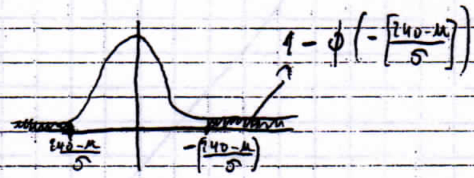
$\uparrow$ 13 MILLONES.

EJ 3) SEA X = LONGITUD DEL PIE $\sim N(\mu, \sigma)$

a) SE SABE QUE

$$\underbrace{P(X \leq 240) = 0{,}05}_{\text{A}} \quad y \quad P(X \geq 280) = 0{,}1 \Rightarrow \underbrace{P(X \leq 280) = 0{,}9}_{\text{B}}$$

SEA $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$



A $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{240-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$

$$P\left(Z \leq \frac{240-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05 \iff \phi\left(\frac{240-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$$

$$1 - \phi\left[-\left(\frac{240-\mu}{\sigma}\right)\right] = 0{,}05$$

$$\phi\left[-\left(\frac{240-\mu}{\sigma}\right)\right] = 0{,}95$$

$\iff$ ME FIJO EN LA TABLA DE $N(0,1)$

$$-\left(\frac{240-\mu}{\sigma}\right) = 1{,}65 \iff \boxed{\frac{240-\mu}{\sigma} = -1{,}65}$$

C

B $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{280-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9$

ME FIJO EN LA TABLA DE $N(0,1)$

$$P\left(Z \leq \frac{280-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \iff \phi\left(\frac{280-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \iff \boxed{\frac{280-\mu}{\sigma} = 1{,}29}$$

D

TENGO UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{cases} C \\ D \end{cases} \Rightarrow D - C = \frac{280-\cancel{\mu}-240+\cancel{\mu}}{\sigma} = 2{,}94$$

$$\frac{40}{\sigma} = 2{,}94 \iff \sigma = 13{,}605$$

REEMPLAZANDO EN Ⓓ POR EL NUEVO VALOR DE σ

$$Ⓓ = \frac{280-\mu}{13,605} = 1,29 \iff 280-\mu = 17,5510 \iff \mu = 262,4489796$$

$$\therefore X \sim N(262,449\,,\,(13,605)^2)$$

b) —

NOTA

EJ 4)

SEA X = CANT. DE ANIMALES EN LA JAULA y los eventos:

$A_R = \{$ LA RATA SALE DE LA JAULA $\}$

$A_{P_1} = \{$ EL POLLO 1 SALE DE LA JAULA $\}$ → INDEPENDIENTES y tq $P(A_R) = P(A_{P_1}) = P(A_{P_2}) = 0,3$

$A_{P_2} = \{$ EL POLLO 2 SALE DE LA JAULA $\}$

a) LA DISTRIBUCIÓN DE X ES $Bi(3, 0,7)$ YA QUE: (CONSIDERO ÉXITO A QUE EL ANIMAL SE QUEDE EN LA JAULA)

$$P_X(0) = \binom{3}{0} \cdot (0,3)^3 (1-0,3)^0 = (0,3)^3 = P(A_R \cap A_{P_1} \cap A_{P_2})$$

$$P_X(1) = \binom{3}{1} \cdot (0,3)^2 \cdot (1-0,3) = \binom{3}{1} \cdot 0,7 \cdot (0,3)^2 = P\left((A_R \cap A_{P_1} \cap A_{P_2}^c) \cup (A_R \cap A_{P_1}^c \cap A_{P_2}) \cup (A_R^c \cap A_{P_1} \cap A_{P_2})\right)$$

$$P_X(2) = \binom{3}{2} \cdot (0,7)^2 \cdot 0,3 = P\left((A_R^c \cap A_{P_1}^c \cap A_{P_2}) \cup (A_R^c \cap A_{P_1} \cap A_{P_2}^c) \cup (A_R \cap A_{P_1}^c \cap A_{P_2}^c)\right)$$

$$P_X(3) = \binom{3}{3} \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3)^0 = P(A_R^c \cap A_{P_1}^c \cap A_{P_2}^c)$$

b)

Y \ X	0	1	2	3
0	$\frac{27}{1000}$	0	0	0
2	0	$\frac{63}{500}$	0	0
4	0	$\frac{63}{1000}$	$\frac{147}{1000}$	0
6	0	0	$\frac{147}{500}$	0
8	0	0	0	$\frac{343}{1000}$

$P_{XY}(0,0) = P(X=0, Y=0) = P(A_R \cap A_{P_1} \cap A_{P_2}) = (0,3)^3$

$P_{XY}(1,2) = P\left((A_R \cap A_{P_1}^c \cap A_{P_2}) \cup (A_R \cap A_{P_1} \cap A_{P_2}^c)\right) = 2 \cdot (0,3)^2 \cdot 0,7$

$P_{XY}(1,4) = P(A_R^c \cap A_{P_1} \cap A_{P_2}) = (0,3)^2 \cdot 0,7$

$P_{XY}(1,6) = 0 \quad P_{XY}(2,2) = 0$

$P_{XY}(2,4) = P(A_R \cap A_{P_1}^c \cap A_{P_2}^c) = (0,7)^2 \cdot 0,3$

$P_{XY}(2,6) = P\left((A_R^c \cap A_{P_1}^c \cap A_{P_2}) \cup (A_R^c \cap A_{P_1} \cap A_{P_2}^c)\right) = 2 \cdot (0,7)^2 \cdot 0,3$

$P_{XY}(3,8) = P(A_R^c \cap A_{P_1}^c \cap A_{P_2}^c) = (0,7)^3$

SUMO TODO Y ME DA 1 ✓

c) $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$

$E(XY) = P_{XY}(1,2)\cdot 1\cdot 2 + P_{XY}(1,4)\cdot 4 + P_{XY}(2,4)\cdot 8 + P_{XY}(2,6)\cdot 12 + P_{XY}(3,8)\cdot 24$

$= \frac{63}{500}\cdot 2 + \frac{63}{1000}\cdot 4 + \frac{147}{1000}\cdot 8 + \frac{147}{500}\cdot 12 + \frac{343}{1000}\cdot 24$

$= \frac{63}{250} + \frac{63}{250} + \frac{147}{125} + \frac{441}{125} + \frac{1029}{125} = \frac{63+147+441+1029}{125} = \frac{336}{25} = 13{,}44$

$E(X) = 3\cdot 0{,}7 = \frac{21}{10} = 2{,}1$

Uso las filas de la tabla para calcular las marginales

$E(Y) = P_Y(2)\cdot 2 + P_Y(4)\cdot 4 + P_Y(6)\cdot 6 + P_Y(8)\cdot 8$

$= 2\cdot\frac{63}{500} + 4\cdot\left(\frac{63}{1000} + \frac{147}{1000}\right) + 6\cdot\left(\frac{147}{500}\right) + 8\cdot\left(\frac{343}{1000}\right)$

$= \frac{63}{250} + 4\cdot\frac{21}{\cancel{100}\ 25} + \frac{441}{250} + \frac{343}{125} = \frac{28}{5} = 5{,}6$

$\therefore$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{336}{25} - \frac{28}{5}\cdot\frac{21}{10} = \frac{42}{25} \neq 0$

Si fuesen independientes $\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$ $\therefore$ X e Y no son independientes

d) —

FECHA

X = longitud del pie izquierda

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

b) $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ independientes

$P(|X_1 - X_2| > 5) = P(X_1 - X_2 > 5) + P(X_1 - X_2 < -5)$

$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$

$Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ independientes

$aY_1 + bY_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2) \leftarrow$

4) d) $P(Y \leq 2X) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(1,2) + p_{XY}(2,2) +$

NOTA

(13) 1

1. $P(D) = 0.05$

a) $P(D|A_1) \overset{\text{BAYES}}{=} \dfrac{P(A_1|D)P(D)}{P(A_1)} \overset{\text{PROB TOTAL}}{=} \dfrac{0.9 * 0.05}{P(A_1|D)P(D) + P(A_1|D^c)P(D^c)}$

$= \dfrac{0.9 * 0.05}{0.9 * 0.05 + 0.02 * 0.95} = \dfrac{0.045}{0.065} = 0.70312$

b) $P(A_1 \cap A_2) \overset{\text{PROB TOTAL}}{=} P(A_1 \cap A_2 | D) P(D) + P(A_1 \cap A_2 | D^c) P(D^c)$

$= P(A_1|D)\ P(A_2|D)\ P(D) + P(A_1|D^c) P(A_2|D^c) P(D^c)$

$= (0.9)^2\ 0.05 + (0.02)^2\ 0.95 = 0.04088$

$P(A_1 \cap A_2) = 0.04088$

$P(A_1)\ P(A_2) = 0.004096$

A_1 y A_2 no son indep

c) $P(D | A_1 \cap A_2) \overset{\text{BAYES}}{=} \dfrac{P(A_1|D) P(A_2|D) P(D)}{P(A_1 \cap A_2)}$

$= \dfrac{(0.9)^2\ 0.05}{0.04088} = 0.9907$

2. X_t : # pasajeros que llegan al aeropuerto en t hora/s (en miles)

$$X_t \sim \mathcal{P}(0.2t)$$

a) $P(X_{12} = 4) = \dfrac{(2.4)^4 e^{-2.4}}{4!} = 0.1254$

b) $X_t \sim \mathcal{P}(0.2t)$

$$P(X_t = 0) < 0.2$$

$$e^{-0.2t} < 0.2$$

$$-0.2t < \ln 0.2$$

$$t > \frac{\ln 0.2}{-0.2}$$

$$t > -5 \ln 0.2$$

c) $X_{720} \sim \mathcal{P}(144)$

$$G = 125000 X_{720} - 5 * 10^6$$

$$E(G) = E(125000 X_{720} - 5 * 10^6)$$

$$= 125000 E(X_{720}) - 5 * 10^6 = 13 * 10^6$$

13 2

3. X: longitud del pie en mm

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

a) $P(X > 280) = 0.1$ $\qquad$ $P(X < 240) = 0.05$

$P(X \leq 280) = 0.9$ $\qquad$ $P(X \leq 240) = 0.05$

$\phi\left(\frac{280-\mu}{\sigma}\right) = 0.9$ $\qquad$ $\phi\left(\frac{240-\mu}{\sigma}\right) = 0.05$

$\frac{280-\mu}{\sigma} = 1.28$ $\qquad$ $1-\phi\left(\frac{\mu-240}{\sigma}\right) = 0.05$

$1.28\sigma - 280 = -\mu$ $\qquad$ $\frac{\mu-240}{\sigma} = 1.64$

$-1.28\sigma + 280 = \mu$

$$\frac{-1.28\sigma + 280 - 240}{\sigma} = 1.64$$

$-1.28\sigma + 40 = 1.68\sigma$ $\qquad$ $\mu = \frac{9735}{37}$

$\sigma = \frac{500}{37}$

$$X \sim N\left(\frac{9735}{37}, \left(\frac{500}{37}\right)^2\right)$$

$Y = aX, \ a < 0 \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$F_Y(y) = P(aX \leq y) = P(X \geq \frac{y}{a})$

$= 1 - F_X\left(\frac{y}{a}\right)$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y}{a}\right) \qquad aX \sim N(a\mu, |a|\sigma^2)$$

$$f_X\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2} \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R}$$

$$f_X(y) = \frac{1}{-a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a\mu}{a\sigma}\right)^2} I_{(-\infty,+\infty)}(y)$$

b) $X_1, X_2 \sim N\left(\frac{9735}{37}, \left(\frac{500}{37}\right)^2\right)$

$$W = X_1 - X_2 \sim N\left(0, 2\left(\frac{500}{37}\right)^2\right)$$

$$P(|X_1 - X_2| > 5) = 1 - P(|X_1 - X_2| \leq 5)$$

$$= 1 - P(|W| \leq 5) = 1 - (F_W(5) - F_W(-5))$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{5}{2\left(\frac{500}{37}\right)^2}\right) + \phi\left(\frac{-5}{2\left(\frac{500}{37}\right)^2}\right)$$

$$= 1 - \phi(0.01) + 1 - \phi(0.01)$$

$$= 2 - 2 * 0.5040 = 0.992$$

13 3

4. a) X: # animales que quedan en la jaula de un total de 3

$X \sim Bi(3, 0.7)$

b)

Y \ X	0	1	2	3
0	0.027	0	0	0
2	0	0.126	0	0
4	0	0.063	0.147	0
6	0	0	0.294	0
8	0	0	0	0.343

c) $P_{XY}(1,2) = 0.126 \neq P_X(1)\,P_Y(2) = 0.189 \cdot 0.126$

X, Y no son indep

d) $P(Y \leq 2X) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(1,2) + P_{XY}(2,4)$